ΠΛΗ20

ΓΡΑΦΟΙ-ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

α)Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα που μπορεί να έχουν ανακυκλώσεις αλλά όχι παράλληλες ακμές (*σημείωση:* οι ακμές (a, b) και (b, a) δεν θεωρούνται παράλληλες γιατί έχουν αντίθετη φορά). Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει ακμή που συνδέει την a με τη b.

«*Το γράφημα περιέχει τουλάχιστον δύο ανακυκλώσεις*».

$$\exists x \exists y \left(x \neq y \wedge P(x,x) \wedge P(y,y) \right)$$

«*Υπάρχει κορυφή του γραφήματος η οποία έχει ακμές προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές*».

$$\exists x \forall y \left(x \neq y \rightarrow P(x,y) \right)$$

Όλες οι κορυφές ανήκουν σε κάποιο απλό κύκλο μήκους 3» (υπενθυμίζεται ότι σε ένα απλό κύκλο δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενες κορυφές).

$$\forall x \exists y \exists z \left(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \right)$$

«*Ο μέγιστος προς-τα-έξω βαθμός του γραφήματος είναι ίσος με 2*» (ο μέγιστος προς-τα-έξω βαθμός ενός κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ο μεγαλύτερος προς-τα-έξω βαθμός κάποιας κορυφής του).

$$\exists y \exists z \left(y \neq z \wedge P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge \forall w \left(P(x,w) \rightarrow w = y \vee w = z \right) \right)$$

«*η κορυφή έχει προς-τα-έσω βαθμό ίσο με 2*».

$$\exists y \exists z \left(P(y,x) \wedge P(z,x) \wedge (y \neq z) \wedge \forall w \left(P(w,x) \rightarrow (w = y \vee w = z) \right) \right)$$

«*το κατευθυνόμενο γράφημα έχει δύο ακμές που δεν είναι αντιπαράλληλες*»

$$\exists x \exists y \exists z \exists w \left(P(x,y) \wedge (x \neq y) \wedge P(z,w) \wedge (z \neq w) \wedge (x \neq w \wedge y \neq z) \right)$$

β) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε συνδεόμενα κατευθυντικά (κατευθυνόμενα) γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *Q*(*x*, *y*) δηλώνει ότι *«υπάρχει κατευθυντική διαδρομή από την κορυφή x στην κορυφή y».*

η κορυφή *x* είναι απομονωμένη. ***Υπενθύμιση***: *Μια κορυφή είναι απομονωμένη αν δεν έχει ακμή εισερχόμενη από ή εξερχόμενη προς κάποια άλλη κορυφή.*

$\neg\exists y\big((Q(x,y)\vee Q(y,x))\wedge x\neq y\big)$

η κορυφή *x* ανήκει σε κύκλο (που δεν είναι ανακύκλωση).

$\exists y\big(x\neq y\wedge Q(x,y)\wedge Q(y,x)\big)$

καμία απομονωμένη κορυφή δεν ανήκει σε κύκλο (που δεν είναι ανακύκλωση).

$\forall x\big(\psi_1(x)\rightarrow\neg\psi_2(x)\big)$

η κορυφή *x* δεν έχει κατευθυντική διαδρομή προς καμία άλλη κορυφή.

$\forall y(Q(x,y)\rightarrow x=y)$

η κορυφή *x* έχει κατευθυντική διαδρομή προς κάθε άλλη κορυφή.

$\forall y(y\neq x\rightarrow Q(x,y))$

να είναι δένδρο

$\varphi_1=\neg\exists x\exists yP(x,y)$

Ο τύπος πρέπει να δηλώνει ότι το γράφημα είναι δένδρο και επιπλέον ότι η κορυφή x έχει βαθμό 1. Δηλαδή:

$$\varphi_2(x)=\varphi_1\wedge\exists y(G(x,y)\wedge\forall z(G(x,z)\rightarrow z\approx y))$$

Μια κορυφή z για να είναι σημείο κοπής, πρέπει να έχει δύο διαφορετικές γειτονικές κορυφές που να μην βρίσκονται σε κοινό κύκλο. Δηλαδή:

$$\varphi_4(z)=\exists x\exists y(x\neq y\wedge G(x,z)\wedge G(y,z)\wedge\neg P(x,y))$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ερώτημα 1.

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα που μπορεί να έχουν ανακυκλώσεις αλλά όχι παράλληλες ακμές (*σημείωση:* οι ακμές (a, b) και (b, a) δεν θεωρούνται παράλληλες γιατί έχουν αντίθετη φορά). Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει ακμή από την a προς την b.

1. Γράψτε μια πρόταση στην κατηγορηματική λογική που εκφράζει ότι:
α) «*Το γράφημα περιέχει τουλάχιστον δύο ανακυκλώσεις*».
β) «*Οι κορυφές του γραφήματος που έχουν ανακύκλωση δεν συνδέονται μεταξύ τους*».
γ) «*Το γράφημα δεν περιέχει ακμές με κοινά άκρα και αντίθετη φορά (μπορεί όμως να περιέχει ανακυκλώσεις)*».
δ) «*Κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών συνδέεται με μία μόνο ακμή*».
ε) «*Υπάρχει μοναδική κορυφή από την οποία ξεκινούν ακμές προς όλες τις κορυφές του γραφήματος*».

2. Αναφορικά με τη συγκεκριμένη ερμηνεία, εξηγείστε τι εκφράζει η καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:
α) $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x, y))$
β) $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x, y))$
γ) $\exists x \exists y \exists z (y \neq z \wedge P(x, y) \wedge P(x, z))$
δ) $\forall x \exists y [P(y, x) \wedge \forall z (P(z, x) \rightarrow y = z)]$

3. Να κατασκευάσετε ένα γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές στο οποίο:
α) Να αληθεύουν οι προτάσεις (2.α) και (2.δ).
β) Να αληθεύουν οι προτάσεις (2.γ) και (2.δ).

Απάντηση:

1) **(α)** $\exists x \exists y \left(x \neq y \wedge P(x, x) \wedge P(y, y)\right)$

(β) $\forall x \forall y \left(P(x, x) \wedge P(y, y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x)\right)$

(γ) $\neg\left(\exists x \exists y [x \neq y \wedge P(x, y) \wedge P(y, x)]\right)$

(δ) $\forall x \forall y \left(x \neq y \rightarrow [P(x, y) \leftrightarrow \neg P(y, x)]\right)$

(ε) Εκφράζουμε πρώτα το ότι η κορυφή x έχει ακμές προς όλες τις κορυφές του γραφήματος $O(x) = \forall y\, P(x, y)$.
Το ζητούμενο εκφράζεται από τον τύπο

$$\exists x\big[O(x) \wedge \forall z\,\big(O(z) \rightarrow z{=}x\big)\big].$$

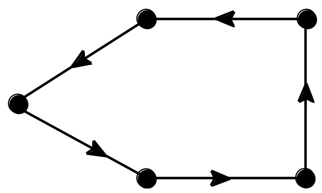
2) **(α)** Από κάθε κορυφή ξεκινάει μία ακμή προς κάποια άλλη κορυφή.

(β) Υπάρχει κορυφή που συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές.

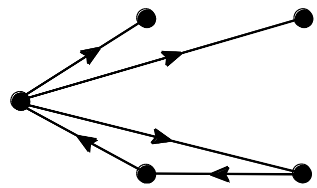
(γ) Υπάρχει κορυφή με προς τα έξω βαθμό τουλάχιστον 2.

(δ) Ο προς-τα-έσω βαθμός κάθε κορυφής του γραφήματος είναι 1.

3) **(α)**



(β)



Στο (α) υποερώτημα θεωρούμε ένα 5-κύκλο ο οποίος ικανοποιεί το ότι ο προς τα έσω βαθμός κάθε κορυφής είναι 1. Προφανώς ικανοποιείται και το 2(α).

Στο (β) υποερώτημα ξεκινάμε με 5 κορυφές και επιλέγουμε μία την οποία συνδέουμε με δύο από τις υπόλοιπες κορυφές. Έτσι ικανοποιείται το 2(γ). Για να ικανοποιείται και το 2(δ) σχηματίζουμε έναν 3-κύκλο με την αρχική κορυφή που επιλέξαμε και τις δύο κορυφές που απομένουν.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 (μονάδες 35)

β) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε *μη κατευθυνόμενα* γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές. Οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P με τη σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει ακμή που συνδέει την a με τη b. Σε αυτή τη γλώσσα, να γράψετε μια πρόταση που εκφράζει την ακόλουθη ιδιότητα:

«Το γράφημα περιέχει τρεις το πολύ κορυφές τέτοιες ώστε κάθε ακμή να προσπίπτει σε τουλάχιστον μία από αυτές».

Η ζητούμενη πρόταση είναι

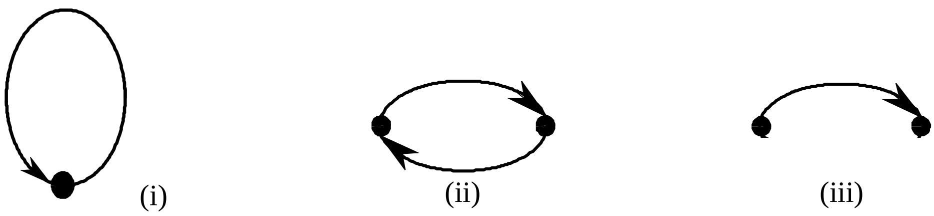
$$\exists x \exists y \exists z \forall a \forall b\ [P(a,b) \rightarrow (a{\approx}x \vee a{\approx}y \vee a{\approx}z \vee b{\approx}x \vee b{\approx}y \vee b{\approx}z)]$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3 (μονάδες 35)

Δίνεται η πρόταση

$$\varphi = \forall x \exists y \varphi_1(x, y) \wedge \forall x \exists y \varphi_2(x, y) ,$$

όπου $\varphi_1(x, y) = P(x, y) \wedge \forall z(P(x, z) \to z = y)$ και $\varphi_2(x, y) = P(y, x) \wedge \forall z(P(z, x) \to z = y)$.
Ερμηνεύουμε την πρόταση σε κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή το σύμπαν είναι οι κορυφές ενός γραφήματος και η ερμηνεία του κατηγορηματικού συμβόλου $P(x, y)$ είναι «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y»).
α) Εξετάστε σε ποια από τα παρακάτω γραφήματα αληθεύει η πρόταση φ.



(i) (ii) (iii)

β) Δώστε μια δομή που επαληθεύει την φ με τουλάχιστον 5 κορυφές. Εξηγήστε (με λόγια, στη φυσική γλώσσα) ποιες δομές επαληθεύουν την φ.

(*Υπόδειξη: ο τύπος* $P(x, y) \wedge \forall z(P(x, z) \to z = y)$ *είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον* $\forall z(P(x, y) \wedge (P(x, z) \to z = y))$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

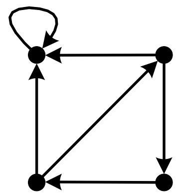
α) Επαληθεύεται στα (i) και (ii) και δεν επαληθεύεται στο (iii).
β) Μία τέτοια δομή είναι ένας κατευθυνόμενος κύκλος με 5 ή περισσότερες κορυφές. Το πρώτο τμήμα της φ λέει «κάθε κορυφή του γραφήματος έχει έξω βαθμό ακριβώς 1». Το δεύτερο τμήμα λέει «κάθε κορυφή του γραφήματος έχει έσω βαθμό ακριβώς 1». Συνεπώς η σύζευξη λέει ότι κάθε κορυφή ενός γραφήματος που επαληθεύει την φ έχει έσω και έξω βαθμό ακριβώς 1, άρα ένα τέτοιο γράφημα είναι ένα σύνολο από κατευθυνόμενους κύκλους.

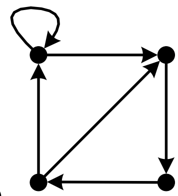
ΕΡΩΤΗΜΑ 4

β) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $Q(x, y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y».

1) Δίνεται η πρόταση $\theta = \exists x\, \exists x_1\, \exists x_2\, \exists x_3\, \exists y\, [\; Q(x, x_1) \wedge Q(x_1, x_2) \wedge Q(x_2, x_3) \wedge Q(x_3 , y)\;]$.
Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα) ποια γραφήματα επαληθεύουν την θ. Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 4 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ. Να δώσετε μια δομή με το πολύ 3 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ.

2) Να διατυπώσετε μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) παραπλεύρως και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii).


(i)


(ii)

3) Δίνεται η πρόταση $\varphi = \exists x\, \{ \neg Q(x, x) \wedge \forall y\, [\, x \neq y \rightarrow (\, Q(x, y) \wedge \forall z\, \neg Q(y, z)\,)\,]\, \}$.
Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιώντας την έννοια του έξω-βαθμού κορυφής) ποια γραφήματα επαληθεύουν την φ. Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 5 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση φ.
Υπόδειξη: Σκεφθείτε ποιες κορυφές ικανοποιούν τον τύπο $\psi(x) = \forall y\, [\, x \neq y \rightarrow (\, Q(x, y) \wedge \forall z\, \neg Q(y, z)\,)\,]$.
Υπενθύμιση: Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, ο έξω-βαθμός μιας κορυφής u είναι ο αριθμός των ακμών που ξεκινούν από την u.

ΛΥΣΗ

β.1) Η πρόταση θ απαιτεί την ύπαρξη 5 κορυφών (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών μεταξύ τους) ώστε η $1^{η}$ να συνδέεται με τη $2^{η}$, η $2^{η}$ να συνδέεται με την $3^{η}$, η $3^{η}$ να συνδέεται με την $4^{η}$, και η $4^{η}$ να συνδέεται με την $5^{η}$. Επομένως η θ επαληθεύεται από κάθε κατευθυνόμενο γράφημα που περιλαμβάνει διαδρομή με μήκος τουλάχιστον 4. Ακολουθούν δύο παραδείγματα γραφημάτων που επαληθεύουν τη θ, το πρώτο με 5 κορυφές και το δεύτερο με 1 κορυφή.

β.2)

$1^{ος}$ τρόπος: Το γράφημα (i) έχει μία κορυφή (την πάνω αριστερά) από την οποία δεν υπάρχει εξερχόμενη ακμή προς καμία άλλη κορυφή. Αντίθετα το γράφημα (ii) δεν έχει τέτοια κορυφή. Επομένως, μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii) είναι:

$$\exists x\, \forall y\, (x \neq y \rightarrow \neg Q(x, y))$$

$2^{ος}$ τρόπος: Το γράφημα (ii) έχει απλό κύκλο μήκους 4 ενώ το γράφημα (i) δεν έχει τέτοιο κύκλο Επομένως, μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii) είναι:

$$\neg[\, \exists x\, \exists y\, \exists z\, \exists w\, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge Q(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge Q(z, w) \wedge Q(w, x))\,]$$

β.3) Η πρόταση φ απαιτεί την ύπαρξη κορυφής x που δεν έχει ανακύκλωση και για κάθε άλλη κορυφή y, η x συνδέεται με την y και η y δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή (ούτε ανακύκλωση). Με άλλα λόγια, η φ αληθεύει σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις όπου υπάρχει μία και μόνο κορυφή που έχει εξερχόμενες ακμές και αυτή η κορυφή συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές.

Επομένως, στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιώντας την έννοια του έξω-βαθμού, η φ αληθεύει σε κατευθυνόμενα γραφήματα (χωρίς παράλληλες ακμές και) χωρίς ανακυκλώσεις όπου μία κορυφή έχει έξω-βαθμό $n - 1$ και όλες οι άλλες κορυφές έχουν έξω-βαθμό 0 (n είναι ο συνολικός αριθμός των κορυφών).

Ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 κορυφές που επαληθεύει τη φ είναι: