5. Κατηγορηματικός Λογισμός (Predicate Calculus)

5.1 Αντικείμενα, Ιδιότητες και Σχέσεις

Θεωρείστε την παρακάτω εξαγωγή συμπεράσματος:

Κανένας ακέραιος δεν είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνό του

Το $\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνό του

Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ακέραιος.

Μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

Κανένα A δεν είναι B.
Το c είναι B.

Το c δεν είναι A.

Η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη γιατί αν το συμπέρασμα ήταν ψευδές αλλά οι υποθέσεις αληθείς, τότε το c θα ήταν και A και B. Τι κάνει όμως την εξαγωγή συμπεράσματος έγκυρη; Αν η λέξη «κανένα» αντικαθιστόταν από τη λέξη «κάθε» ή «μερικά», τότε δεν θα ήταν έγκυρη.

Στον προτασιακό λογισμό δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε προτάσεις της μορφής «κανένα A δεν είναι B». Είναι μια αρνητική πρόταση, αλλά δεν είναι η άρνηση της πρότασης «όλα τα A είναι B». Η άρνηση αυτής θα ήταν «μερικοί ακέραιοι είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους». Άρα θα πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να αναπαριστούμε προτάσεις αυτής της μορφής επίσης.

Οι φράσεις «ακέραιος» και «μεγαλύτερος από το τετράγωνό του» δηλώνουν ιδιότητες τις οποίες κάποια αντικείμενα μπορούν να έχουν. Η πρόταση «κανένα A δεν είναι B» μας λέει ότι κανένα αντικείμενο δεν μπορεί να έχει τις δύο ιδιότητες συγχρόνως, ή, διαφορετικά, ότι η κλάση των ακεραίων με την κλάση των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους δεν έχουν κοινά στοιχεία. Τα γράμματα A και B δηλώνουν λοιπόν ιδιότητες. Το γράμμα c είναι διαφορετικό. Το $\frac{1}{2}$ δεν δηλώνει μια ιδιότητα αλλά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο. Αντικείμενα μπορεί να έχουν ιδιότητες. Π.χ., το $\frac{1}{2}$ έχει την ιδιότητα ότι είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνό του, αλλά δεν έχει την ιδιότητα του ακέραιου.

Θεωρείστε τώρα την εξαγωγή συμπεράσματος

Ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος
Ο Σοφοκλής είναι ποιητής
Ο Αριστοτέλης μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

Κάποιος φιλόσοφος μένει στην ίδια πόλη με κάποιον ποιητή

η οποία μπορεί να γραφεί και ως

α είναι P
β είναι Q
α είναι R με β

κάποιο P είναι R με κάποιο Q

Τα α,β είναι αντικείμενα ενώ τα P,Q είναι ιδιότητες. Το R δεν είναι ιδιότητα. Εκφράζει μια σχέση μεταξύ αντικειμένων. Μπορούμε να έχουμε και τριαδικές ή n-αδικές σχέσεις. Π.χ., μκδ(α,β,γ): το γ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β.

Χρειαζόμαστε λοιπόν μηχανισμούς αναπαράστασης και λογισμού για αντικείμενα, ιδιότητες και σχέσεις. Αυτό είναι και το αντικείμενο του Κατηγορηματικού Λογισμού.

5.2 Ονόματα και Κατηγορήματα

Τα ονόματα παίζουν το ρόλο περιγραφικών εκφράσεων που υποδεικνύουν κάποιο αντικείμενο. Στον κατηγορηματικό λογισμό χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα (a,b,c,d κλπ) ως ονόματα και τα οποία καλούνται σταθερές αντικειμένων ή απλά σταθερές αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης. Για την απόδοση ιδιότητων σε αντικείμενα σε χρησιμοποιούμε σύμβολα κατηγορημάτων (για τις ιδιότητες) και ορίσματα (για τα αντικείμενα). Για παράδειγμα, για να αποδώσουμε την ιδιότητα F στο αντικείμενο α, γράφομε $F(\alpha)$. Με παρόμοιο τρόπο αναπαριστώνται και οι σχέσεις : χρησιμοποιούμε κατηγορήματα με περισσότερα του ενός ορίσματα. Για παράδειγμα, $Q(a,b)$ αναπαριστά τη σχέση Q μεταξύ των a,b.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω τα κατηγορήματα E(_): _είναι άρτιος, P(_): _είναι πρώτος, M(_,_) ο _ είναι πολλαπλάσιο του _, G(_,_): ο _ είναι μεγαλύτερος του _. Αν οι σταθερές a,b,c,d συμβολίζουν τους ακέραιους 1,2,3,4 αντίστοιχα, τότε $E(b)$ σημαίνει «ο 2 είναι άρτιος», P(c) σημαίνει «ο 3 είναι πρώτος», $\neg M(b,c)$ σημαίνει «ο 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3», $M(f,b) \vee P(f)$ σημαίνει «το 6 είναι πολλαπλάσιο του 2 ή το 6 είναι πρώτος», $M(h,b) \rightarrow P(h) \vee G(h,b)$ σημαίνει «αν το 8 είναι πολλαπλάσιο του 2, τότε το 8 είναι πρώτος ή το 8 είναι μεγαλύτερο του 2» και $P(d) \leftrightarrow E(e)$ σημαίνει «το 4 είναι πρώτος αν και μόνο αν το 5 είναι άρτιος».

5.3 Ποσοδείκτες

Θεωρείστε ξανά την εξαγωγή συμπεράσματος

ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος
ο Σοφοκλής είναι ποιητής
ο αριστοτέλης μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

κάποιος φιλόσοφος μένει στην ίδια πόλη με κάποιον ποιητή

Οι υποθέσεις μπορούν να αναπαρασταθούν ως $P(a), Q(b), R(a,b)$. Πως μπορεί όμως να εκφραστεί το συμπέρασμα;

Το συμπέρασμα μπορεί να γραφεί ως : για κάποιο x, ο x είναι φιλόσοφος και για κάποιο *y*, ο *y* είναι ποιητής και ο x μένει στην ίδια πόλη με τον y'. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\exists$ για να εκφράσουμε τη φράση «για κάποιο». Το «για κάποιο» διαβάζεται και ως «υπάρχει κάποιο». Το συμπέρασμα γράφεται ως $\exists x(P(x) \wedge \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$. Οι μεταβλητές *x,y* ονομάζονται δεσμευμένες μεταβλητές γιατί η ύπαρξή τους στην πρόταση δεσμεύεται από τους ποσοδείκτες.

Παραδείγματα:

- Υπάρχει ένας ποιητής - $\exists x Q(x)$
- Κάποιος ποιητής είναι φιλόσοφος - $\exists x(Q(x) \wedge P(x))$
- Κάποιος φιλόσοφος είναι ποιητής - $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- Κάποιος μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή - $\exists x R(x,b)$
- Ο Σοφοκλής μένει στην ίδια πόλη με κάποιον - $\exists x R(b,x)$
- Ο Σοφοκλής μένει στην ίδια πόλη με κάποιον φιλόσοφο - $\exists x(P(x) \wedge R(b,x))$
- Ο Σοφοκλής δεν μένει στην ίδια πόλη με κάποιον φιλόσοφο - $\neg\exists x(P(x) \wedge R(b,x))$
- Κανένας φιλόσοφος δεν μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή - $\neg\exists x(P(x) \wedge R(x,b))$

Παράδειγμα:

Κανένας ακέραιος δεν είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνό του
Το $\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνό του

Το $\frac{1}{2}$ δεν είναι ακέραιος
μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$\neg\exists x(I(x) \wedge G(x))$
$G(a)$

$\neg I(a)$

όπου I αναπαριστά την ιδιότητα «ακέραιος», G την ιδιότητα «μεγαλύτερος από το τετράγωνό του» και a το $\frac{1}{2}$. Αν αντί του G χρησιμοποιηθεί το κατηγόρημα H(_,_) που αναπαριστά τη σχέση «μεγαλύτερος από το τετράγωνό του», τότε η παραπάνω εξαγωγή συμπεράσματος γράφεται ως

$\neg\exists x(I(x)\wedge H(x,x))$
$H(a,a)$

$\neg I(a)$

Έχουμε ήδη εισάγει τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $(\exists)$. Η ύπαρξη ενός ποσοδείκτη σε μια πρόταση δεσμεύει την μεταβλητή που ο ποσοδείκτης εισάγει. Για παράδειγμα, η μεταβλητή x στην πρόταση $\exists x(Q(x)\wedge R(a,x))$ είναι δεσμευμένη από το $\exists$. Η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με τις προτάσεις $\exists y(Q(y)\wedge R(a,y))$ και $\exists z(Q(z)\wedge R(a,z))$. Το σύμβολο που χρησιμοποιείται για τη μεταβλητή δεν έχει σημασία εφόσον χρησιμοποιείται σε όλα τα μέρη που εμφανίζεται η δεσμευμένη μεταβλητή. Επομένως, η παραπάνω πρόταση δεν είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\exists y(Q(y)\wedge R(a,z))$. Σε περίπτωση που περισσότεροι από έναν ποσοδείκτες είναι απαραίτητοι, διαφορετικές μεταβλητές πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα, $\exists x(P(x)\wedge\exists y(Q(y)\wedge R(x,y)))$ ή $\exists z(P(z)\wedge\exists y(Q(y)\wedge R(z,y)))$ αλλά όχι $\exists x(P(x)\wedge\exists x(Q(x)\wedge R(x,x)))$.

Το πεδίο ενός ποσοδείκτη είναι το (σύνθετο) κατηγόρημα στο οποίο εφαρμόζεται. Απλά κατηγορήματα φτιάχνονται από σύμβολα κατηγορημάτων, π.χ., *P,Q*. Σύνθετα κατηγορήματα προκύπτουν από τα απλά με χρήση συνδετικών και ποσοδεικτών. Π.χ., $P(a)\wedge\exists y(Q(y)\wedge R(a,y))$ είναι σύνθετο κατηγόρημα. Στην πρόταση $\exists x(P(x)\wedge\exists y(Q(y)\wedge R(x,y)))$ το πεδίο του $\exists x$ είναι $(P(x)\wedge\exists y(Q(y)\wedge R(x,y)))$ ενώ το πεδίο του $\exists y$ είναι $(Q(y)\wedge R(x,y))$.

Ο καθολικός ποσοδείκτης συμβολίζεται με το σύμβολο $\forall$. Χρησιμοποιείται για την έκφραση προτάσεων που αποδίδουν μια ιδιότητα σε όλα τα μέλη ενός συνόλου. Π.χ., «κάθε άνθρωπος είναι θνητός», «για κάθε ακέραιο υπάρχει ένας ακέραιος ο οποίος ισούται με το τετράγωνο του πρώτου». Η πρώτη από αυτές τις προτάσεις μπορεί να γραφτεί ως εξής: "για κάθε x, αν ο x είναι άνθρωπος, τότε ο x είναι θνητός». Αντιστοιχεί δηλαδή στη μορφή $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$, όπου *P* σημαίνει «άνθρωπος» και *Q* σημαίνει «θνητός». Εν γένει, καθολικές δηλώσεις χρησιμοποιούν $\forall,\rightarrow$ ενώ υπαρξιακές χρησιμοποιούν $\exists,\wedge$. Η πρόταση «κάποιος άνθρωπος είναι θνητός» γράφεται ως $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$.

Οι προτάσεις $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ και $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$ έχουν διαφορετικό νόημα από τις παραπάνω εκφράσεις. Η πρώτη μας λέει ότι «τα πάντα έχουν τις ιδιότητες *P,Q*», ενώ η δεύτερη μας λέει ότι «είτε κάτι δεν είναι άνθρωπος είτε είναι θνητός».

Όσον αφορά τη σχέση μεταξύ των δύο ποσοδεικτών, θεωρείστε την πρόταση «κανένας φιλόσοφος δεν μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή». Η πρόταση αυτή αναπαριστάται ως $\neg\exists x(P(x)\wedge R(x,b))$. Η ίδια πρόταση μπορεί να γραφεί και ως : "για κάθε x, αν x είναι φιλόσοφος, τότε ο x δεν μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή», που αντιστοιχεί στην έκφραση $\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x,b))$. Κάθε ένας από τους ποσοδείκτες μπορεί να εκφραστεί από τον άλλο ποσοδείκτη:

$\neg\neg\exists x(...) \equiv \neg\forall x\neg(...)$ δηλαδή $\exists x(...) \equiv \neg\forall x\neg(...)$. Παρομοίως, $\neg\neg\forall x(...) \equiv \neg\exists x\neg(...)$ δηλαδή $\forall x(...) \equiv \neg\exists x\neg(...)$.

Βάσει αυτών των ισοδυναμιών προκύπτει ότι:

$$\neg\exists x(P(x) \wedge R(x,b)) \equiv \forall x\neg(P(x) \wedge R(x,b)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x,b)) \equiv \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x,b))$$

Οι ποσοδείκτες μπορούν να συνδυαστούν και να χρησιμοποιηθούν στην ίδια πρόταση. Για παράδειγμα,

- «κάθε φοιτητής παρακολουθεί κάποιο μάθημα» εκφράζεται ως
  $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge A(x,y)))$
- «κάποιος φοιτητής παρακολουθεί κάθε μάθημα» εκφράζεται ως
  $\exists x(S(x) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow A(x,y)))$
- «κάθε μάθημα παρακολουθείται από κάποιο φοιτητή» εκφράζεται ως
  $\forall y(C(y) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge A(x,y)))$
- «κάποιο μάθημα παρακολουθείται από κάθε φοιτητή» εκφράζεται ως
  $\exists y(C(y) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow A(x,y)))$

5.4 Συναρτήσεις

Η χρήση συναρτήσεων μας δίνει ένα τρόπο προσδιορισμού αντικειμένων. Ο προσδιορισμός αντικειμένων με σταθερές είναι μερική περίπτωση της χρήσης συναρτήσεων. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να εκφράσουμε την πρόταση «ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος», θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια σταθερά για το «δάσκαλο του Αριστοτέλη», όπως στην έκφραση *P(a)*. Τότε η παρακάτω εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη:

Ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος
Κάθε φιλόσοφος μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

Ο δάσκαλος του Αριστοτέλη μένει στην ίδια πόλη με το Σοφοκλή

$P(a)$
ή $\forall x(P(x) \rightarrow R(x,b)$

$R(a,b)$

Θεωρείστε όμως και την ακόλουθη έγκυρη εξαγωγή συμπεράσματος

Ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος

Ο δάσκαλος κάποιου είναι φιλόσοφος

Αυτή η εξαγωγή συμπεράσματος δεν μπορεί να εκφραστεί με το συμβολισμό του Κατηγορηματικού Λογισμού που έχουμε που έχουμε εισάγει μέχρι τώρα. Πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: «για κάποιο x, αν ο x είναι δάσκαλος του Αριστοτέλη, τότε ο x είναι φιλόσοφος», δηλαδή ως: $\exists x(F(x,a) \wedge P(x))$. Αν το F θεωρεί ως κατηγόρημα, τότε ενδέχεται να υπάρχουν περισσότεροι από έναν δάσκαλοι του Αριστοτέλη ενώ εμείς υπονοούμε ότι υπάρχει μόνο ένας. Χρειαζόμαστε μία συνάρτηση η οποία μας δίνει το μοναδικό δάσκαλο του Αριστοτέλη.

Τυπικά: αντικείμενα προσδιορίζονται από όρους. Οι όροι μπορεί να είναι απλοί ή σύνθετοι. Ένα απλός όρος είναι μια σταθερά ή μια μεταβλητή. Σύνθετοι όροι σχηματίζονται με τη χρήση συναρτησιακών συμβόλων που εφαρμόζονται σε όρους.

Ένα συναρτησιακό σύμβολο *f* και μια σταθερά *α* σχηματίζουν τον όρο *f(a).* Οι όροι μπορούν να χρησιμοποιούνται ως ορίσματα κατηγορημάτων. Π.χ., αν η συνάρτηση *f* δίνει το δάσκαλο ενός ατόμου, τότε η έκφραση *P(f(a))* σημαίνει «ο δάσκαλος του Αριστοτέλη είναι φιλόσοφος».

Άλλα παραδείγματα :

- «Υπάρχει κάποιος φιλόσοφος» - $\exists x P(x)$
- «Ο δάσκαλος κάποιου είναι φιλόσοφος» - $\exists x P(f(x))$
- «Κανένας ακέραιος δεν είναι μεγαλύτερος από το τετράγωνό του» - $\neg\exists x(I(x) \wedge G(x, sq(x)))$

5.5 Συντακτικό του Κατηγορηματικού Λογισμού

Ο Κατηγορηματικός Λογισμός Πρώτης Τάξης είναι ένα τυπικό σύστημα με :

1. Λεξιλόγιο:
   a. ένα σύνολο *C*, πιθανόν κενό, από σταθερές αντικειμένων *(a,b,c,d,…)*
   b. ένα σύνολο *F,* πιθανόν κενό, από συναρτησιακά σύμβολα (f,g,h,…)
   c. ένα σύνολο P, μη κενό, από σύμβολα κατηγορημάτων (F,G,P,Q,R,…)
   d. ένα σύνολο *V*, μη κενό, πιθανόν μη-πεπερασμένο από μεταβλητές (u,, v, w, x, y, …)
   e. ποσοδείκτες ($\forall, \exists$)
   f. συνδετικά ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)
   g. παρενθέσεις και κόμμα (,)
   Συναρτησιακά σύμβολα και σύμβολα κατηγορημάτων έχουν μια πληθικότητα (βαθμό) μεγαλύτερη του 0
2. Κανόνες Συντακτικού
   a. Ένας όρος είναι μια σταθερά ή μια μεταβλητή ή $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ όπου f είναι συναρτησιακό σύμβολο βαθμού n και $t_1, t_2, ..., t_n$ είναι όροι
   b. Αν $t_1, t_2, ..., t_n$ είναι όροι και *P* είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος βαθμού n, τότε $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ είναι ένα απλό σχήμα
   c. Αν A και B είναι σχήματα τότε και τα $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ είναι σχήματα
   d. Ένα μοναδιαίο σχήμα είναι ένα σχήμα μιας μεταβλητής (π.χ. $P(\_), Q(\_) \wedge R(a, \_)$)
   e. Αν Φ είναι ένα μοναδιαίο σχήμα και ξ κάποια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στο Φ, τότε $\forall x \Phi(x)$ και $\exists x \Phi(x)$ είναι σχήματα