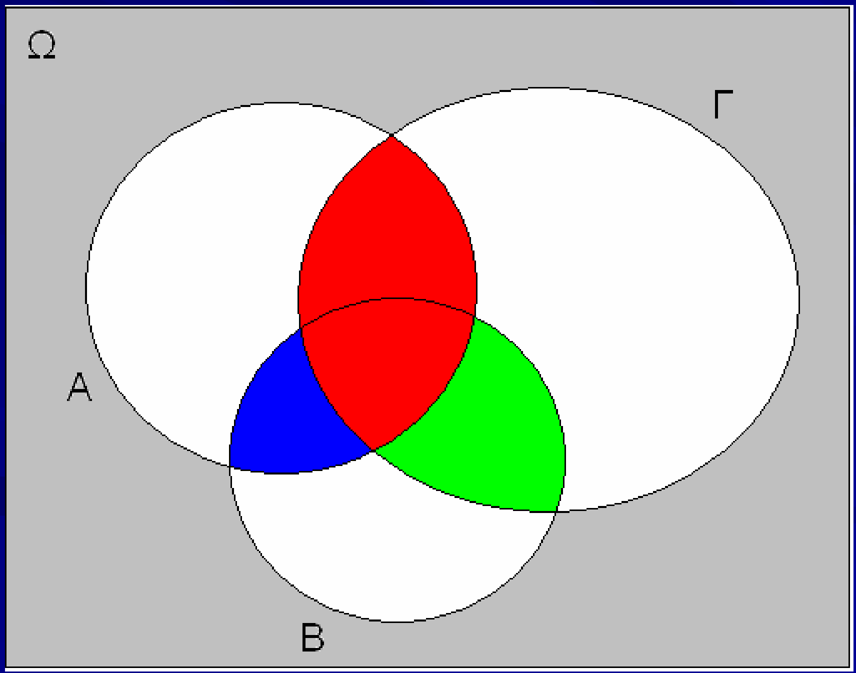
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Α. ΣΠΙΝΑΚΗΣ

- Κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τις προβλέψεις αποτελεσμάτων τυχαίων γεγονότων



ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

- Πείραμα τύχης: διαδικασία που είναι δυνατόν να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες, το αποτέλεσμα της οποίας δεν μπορεί να προβλεφθεί

- Παράδειγμα:

1) το ρίξιμο ενός ζαριού

2) το ρίξιμο ενός νομίσματος

3) ο χρόνος που περιμένει κάποιος το λεωφορείο

- Δειγματικός χώρος (Ω): το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Αυτά συμβολίζονται με $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

➢ Παράδειγμα:

1) το ρίξιμο ενός νομίσματος:

Ω={Κ, Γ}, Κ=κεφαλή, Γ=γράμματα

2) γέννηση ενός παιδιού:

Ω={Κ, Α,}, Κ=κορίτσι, Α=αγόρι

3) ρίξιμο ενός ζαριού:

Ω={1,2,3,4,5,6}

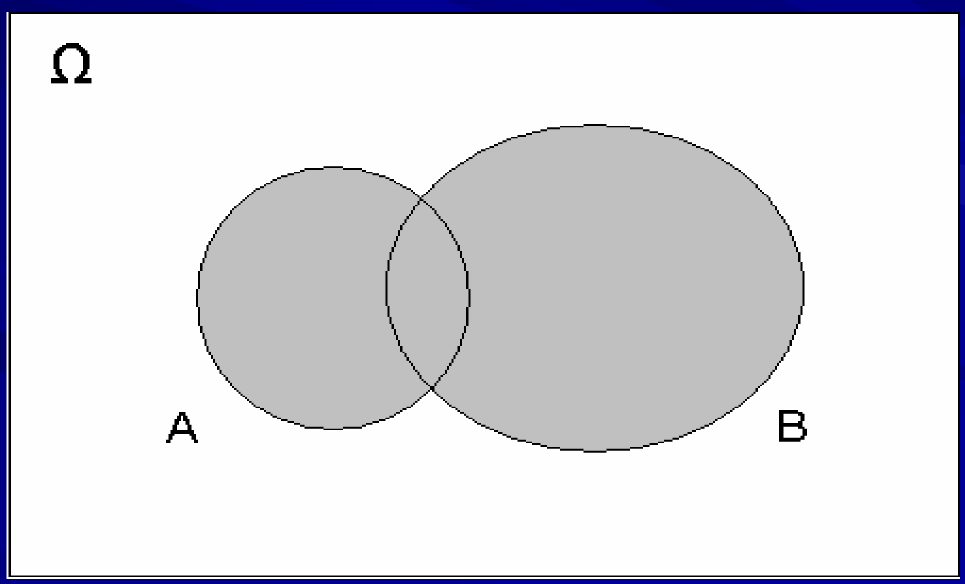
- Ενδεχόμενο (Α): κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου. Σε αυτά συμπεριλαμβάνεται ο ίδιος ο δειγματικός χώρος και το κενό σύνολο
  - Στοιχειώδες ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που περιλαμβάνει ένα μόνο αποτέλεσμα $A = \{\omega_1\}$
  - Βέβαιο ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση ενός πειράματος, δηλαδή ο ίδιος δειγματικός χώρος Ω
  - Αδύνατο ενδεχόμενο $(\emptyset)$: ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος

- Παράδειγμα: έστω το αποτέλεσμα ενός πειράματος, το ρίξιμο ενός νομίσματος δύο φορές
- Ο δειγματικός χώρος είναι: (όλα τα δυνατά αποτελέσματα), **Ω={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}**

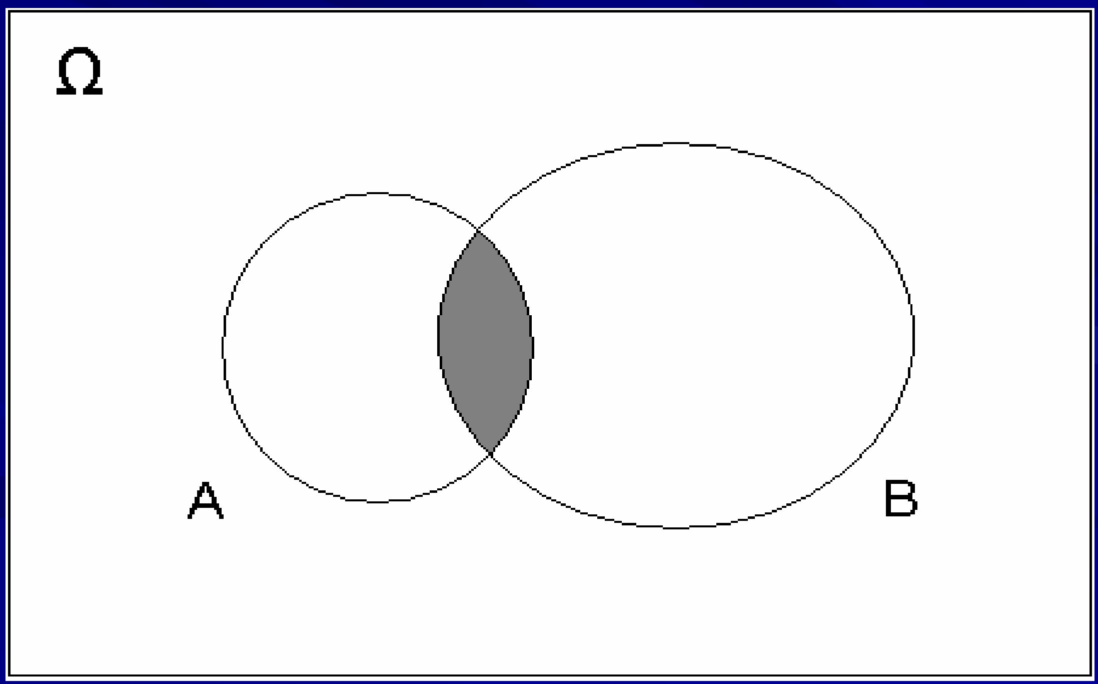
  Κ=κεφαλή, Γ=γράμματα
- Έστω ότι μας ενδιαφέρει το ενδεχόμενο

  Α: «οι δύο ενδείξεις να είναι ίδιες», τότε το ενδεχόμενο Α είναι: **Α={ΚΚ, ΓΓ},** μας ενδιαφέρουν μόνο οι ενδείξεις που ταυτίζονται

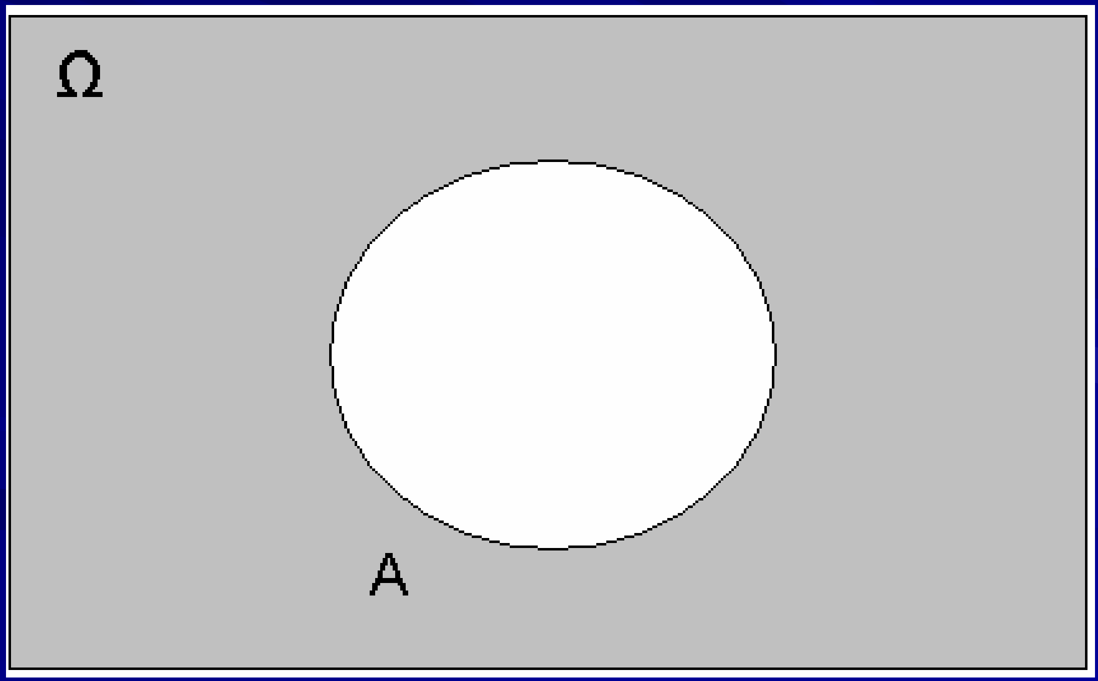
- <u>Πράξεις ενδεχομένων</u>: τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα δειγματικού χώρου. Σε αυτά μεταφέρονται έννοιες και πράξεις που έχουν οριστεί για σύνολα
    - Ενδεχόμενο $(A \cup B)$: 'Α ένωση Β' ή 'Α και Β', πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β
    - Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή



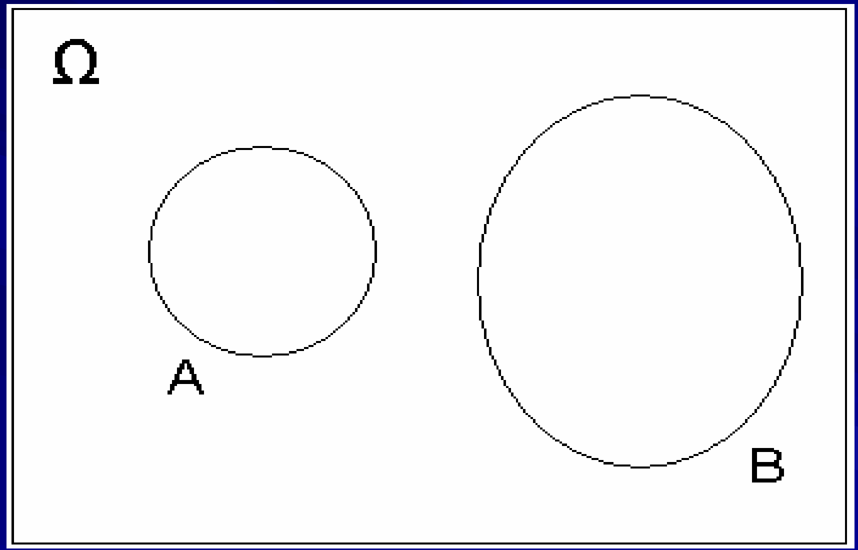
- Ενδεχόμενο $(A \cap B)$: ‘Α τομή Β’ ή ‘Α και Β’, πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β
- Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή



- Ενδεχόμενο A' : ‘όχι Α’ ή ‘αντίθετο του Α’, πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α
- Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή



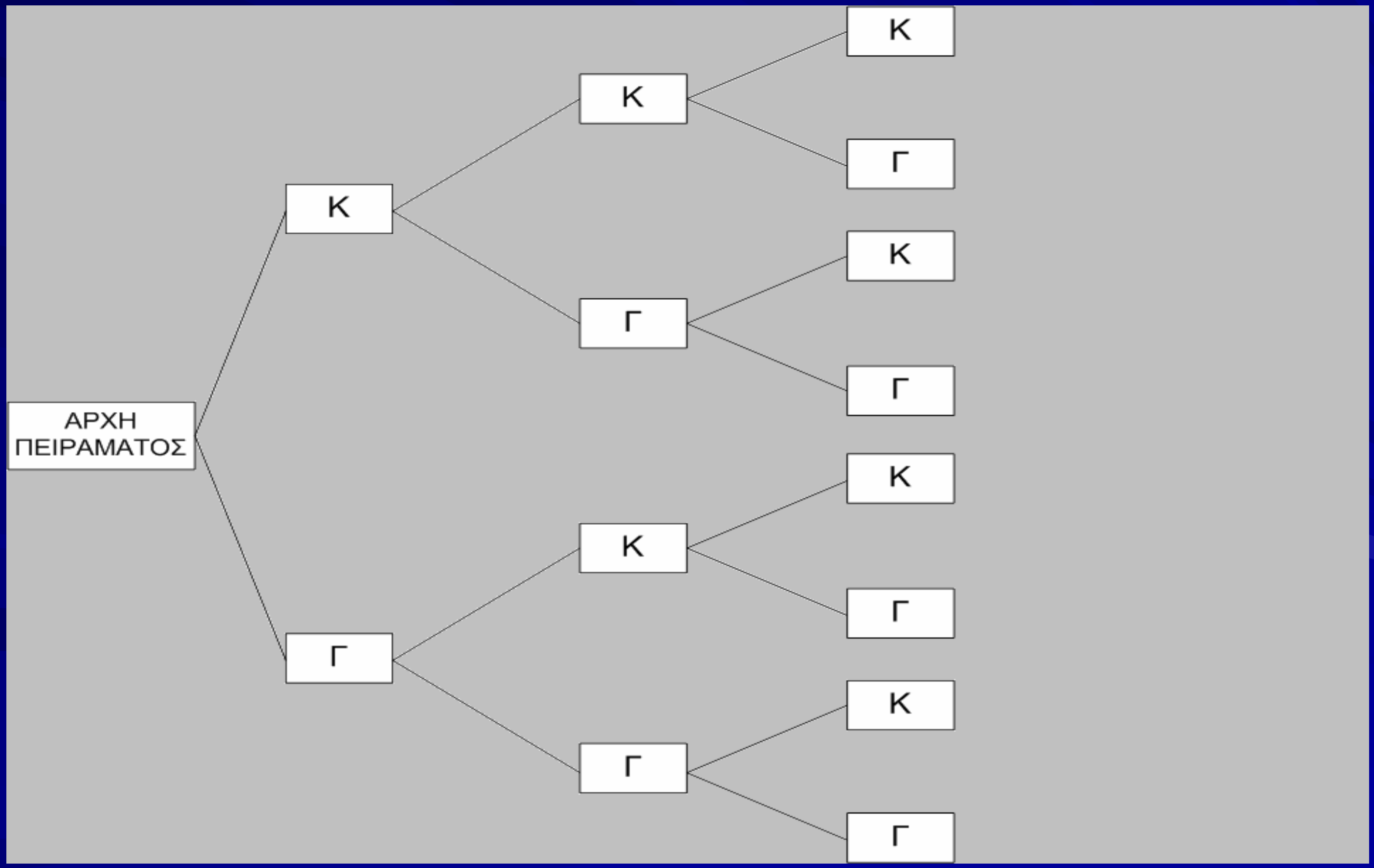
- Ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα (A, B): λέγονται τα ενδεχόμενα που δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο δηλαδή $A \cap B = \varnothing$
- Σχηματικά παρουσιάζονται δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα



- Οι παραπάνω έννοιες επεκτείνονται σε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα

- Παράδειγμα: ρίπτεται ένα νόμισμα τρεις φορές και καταγράφεται κάθε φορά το αποτέλεσμα Κ ή Γ (Κ=κεφαλή, Γ=γράμματα)

Σχηματικά έχουμε το δενδροδιάγραμμα του πειράματος



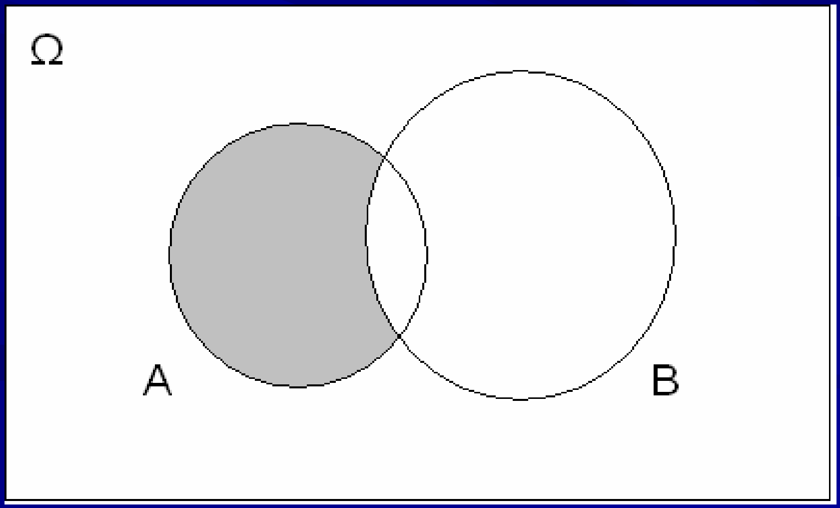
- Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: **Ω={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}**
- Έστω το ενδεχόμενο Α: 'Να έρθει ακριβώς δυο φορές κεφαλή'. Το ενδεχόμενο Α έχει τα στοιχεία: **Α={ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}**
- Έστω το ενδεχόμενο Β: 'Να έρθει τουλάχιστον μια φορά γράμματα'. Το ενδεχόμενο έχει τα στοιχεία:

Β={ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

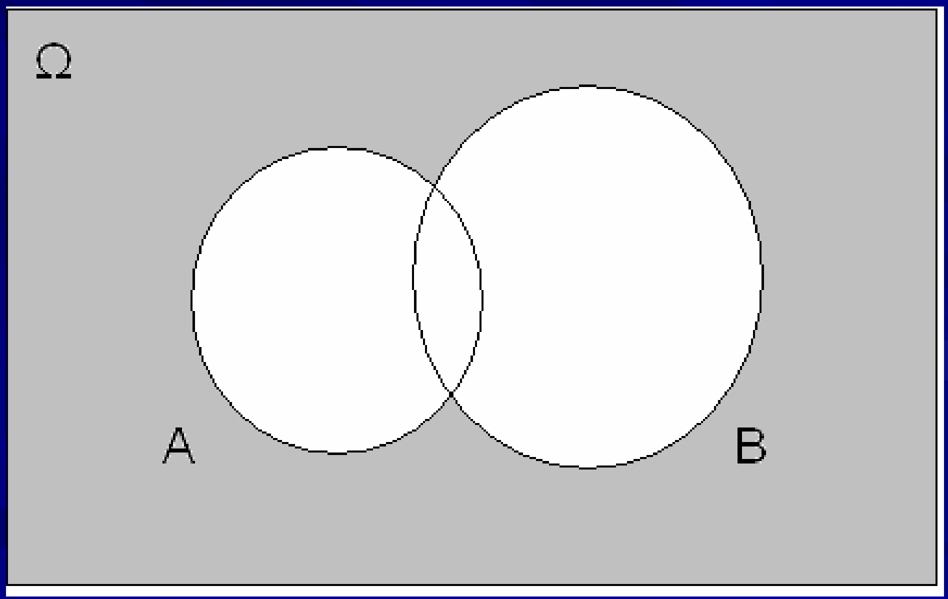
- <u>Παράδειγμα</u>: έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Έστω τα ενδεχόμενα:

➢ Πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. Δηλαδή πραγματοποιείται το Α και το B' δηλαδή η τομή του Α με το αντίθετο του Β

Το ενδεχόμενο αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή



- Κανένα από τα ενδεχόμενα A και B δεν πραγματοποιείται. Δηλαδή πραγματοποιείται το A' και B' δηλαδή η τομή των αντιθέτων ενδεχομένων των A, B. Το ενδεχόμενο αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή



- <u>Σχετική συχνότητα</u>: αν σε n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης εμφανιστεί το ενδεχόμενο (Α) r φορές, τότε συμβολίζουμε ως σχετική συχνότητα του ενδεχομένου Α το πηλίκο $f_A = \frac{r}{n}$

➢ Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ δειγματικός χώρος και $A = \{a_1, a_2, ... a_r\}$ ένα ενδεχόμενο τότε ισχύει:

- $0 \leq f_{\omega_i} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, r$
- $f_{\omega_1} + f_{\omega_2} + \ldots + f_{\omega_n} = 1$
- $f_A = f_{a_1} + f_{a_2} + \ldots + f_{a_r}$

- Έννοια της πιθανότητας: έστω

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ δειγματικός χώρος. Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω_i αντιστοιχείται ένας πραγματικός αριθμός $P(\omega_i)$ για τον οποίο ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n) = 1$

Ο $P(\omega_i)$ ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου

- Έστω το ενδεχόμενο $A = \{a_1, a_2, ... a_r\}$ Η πιθανότητα του Α είναι $P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_r)$

- Επίσης ισχύει $P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1$

- <u>Παράδειγμα</u>: έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $\mathrm{A} = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $\mathrm{B} = \{\omega_2, \omega_3\}$
  Έστω επίσης P(A)=2/5=0.4 και P(B)=3/4=0.75

  Τότε ισχύει: $P(\omega_1) + P(\omega_2) = 0.4$ και $P(\omega_2) + P(\omega_3) = 0.6$ και $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$

  Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

  $P(\omega_1) = 0.25 \quad P(\omega_2) = 0.15 \quad P(\omega_3) = 0.6$

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων:

- Αν $A \cap B = \varnothing$ (ασυμβίβαστα ενδεχόμενα) τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Για δύο αντίθετα ενδεχόμενα A, A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- Για δυο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

Παράδειγμα: έστω δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και

$$P(A \cup B) = 0.8, \quad P(B') = 1/3, \quad P(A \cap B) = 0.4$$

Ζητούμενο:

$$P(B) = ?, \quad P(A) = ?, \quad P(A' \cap B) = ?$$

- $P(B) = 1 - P(B') = 1 - 1/3 = 2/3$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$0.8 = P(A) + 2/3 - 0.4 \Leftrightarrow P(A) = 8/15$$

- $P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$P(A' \cap B) = 2/3 - 2/5 = 4/15$$

<u>Κλασικός ορισμός πιθανότητας</u>

- Έστω ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα δηλαδή $P(\omega_i) = P, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ τότε $P(\Omega) = 1 \Rightarrow$

$$P + P + \ldots + P = 1 \Rightarrow nP = 1 \Rightarrow P = 1/n$$

- Έστω ενδεχόμενο $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ με r ισοπίθανα ενδεχόμενα, τότε

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_r) = r/n$$

- Άρα η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι ο λόγος του πλήθους των <u>ευνοϊκών</u> περιπτώσεων προς του πλήθους των <u>δυνατών</u> περιπτώσεων

- Παράδειγμα: Ένα άτομο εισέρχεται σε ένα ασανσέρ κτιρίου έξι ορόφων και πατάει ένα κουμπί στην τύχη. Ποια η πιθανότητα να κατέβει στον τέταρτο όροφο;
- Αφού είναι ισοπίθανα όλα τα ενδεχόμενα, τότε η πιθανότητα να πατήσει το κουμπί του τέταρτου ορόφου είναι 1/6

- Παράδειγμα: Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας μαθητής στην ομάδα ποδοσφαίρου είναι 1/6, ενώ για την ομάδα μπάσκετ είναι 1/5. Η πιθανότητα να επιλεγεί και στις δυο ομάδες είναι 1/10.

  Έστω τα ενδεχόμενα:

  - Γ: ‘Να επιλεγεί τουλάχιστον σε μια από τις δύο ομάδες’
  - Δ: ‘Να επιλεγεί μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου’

- $P(\Gamma) = P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) \Rightarrow$

  $P(\Gamma) = 1/6 + 1/5 - 1/10 = 4/15$

- Η πιθανότητα να επιλεγεί σε μια τουλάχιστον ομάδα είναι 4/15

- $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}') \bigcup (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \Rightarrow$

  $P(A) = P(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}') + P(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \Rightarrow$

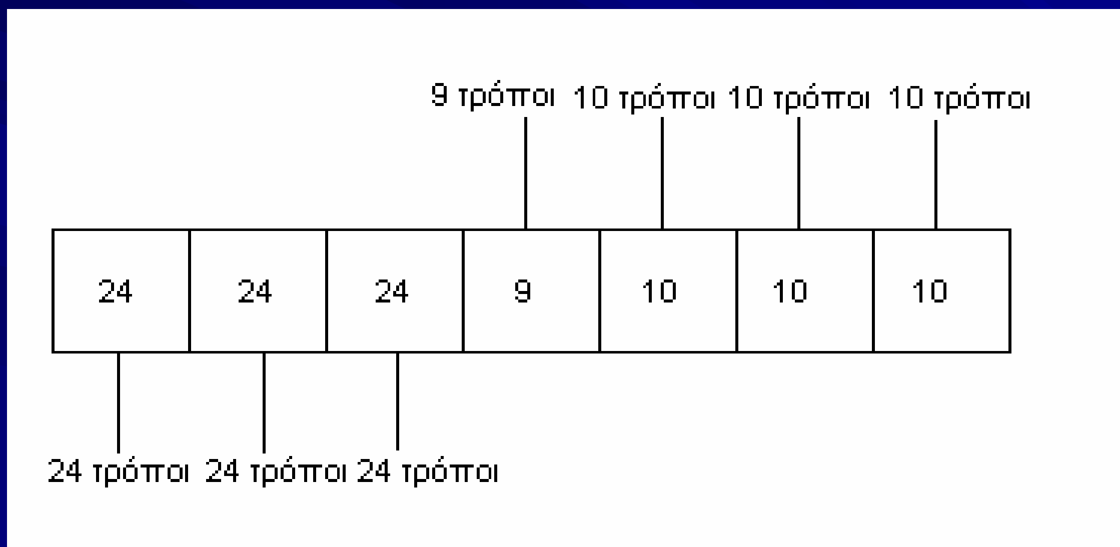
  $P(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}') = 1/6 - 1/10 = 1/15$

- Η πιθανότητα να επιλεγεί μόνο στην ομάδα του ποδοσφαίρου είναι 1/15

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

- Βασική αρχή απαρίθμησης: έστω ένα πείραμα που εκτελείται σε δύο στάδια. Το πρώτο διεκπεραιώνεται με m διαφορετικούς τρόπους και το δεύτερο με n. Τότε το πείραμα εκτελείται με $m \cdot n$ διαφορετικούς τρόπους
- Η αρχή απαρίθμησης ονομάζεται και πολλαπλασιαστική αρχή
- Γενικεύεται για πειράματα με περισσότερα στάδια διεκπεραίωσης

- <u>Παράδειγμα</u>: Μια πινακίδα κυκλοφορίας περιέχει τρία κεφαλαία γράμματα που να ακολουθούνται από τέσσερα ψηφία. Πόσες διαφορετικές πινακίδες θα κατασκευαστούν;
  - Έχουμε επτά θέσεις να συμπληρωθούν



  - Άρα το πλήθος των πινακίδων που θα κατασκευαστεί είναι:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 124.416.000$$

- <u>Μεταθέσεις</u>: έστω n διαφορετικά στοιχεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ τότε κάθε κατάταξη τους σε μια σειρά λέγεται μετάθεση των στοιχείων
  - Δύο μεταθέσεις n διαφορετικών στοιχείων είναι διαφορετικές, όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο που είναι σε δύο <u>διαφορετικές</u> θέσεις στις δύο μεταθέσεις
  - Το πλήθος των μεταθέσεων των n στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_n$ συμβολίζεται με M_n και δίνεται από τον τύπο:

$$M_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

- <u>Παράδειγμα</u>: πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ***ΒΡΕΦΟΣ*** υπάρχουν; Τα γράμματα της λέξης είναι διαφορετικά κι έτσι πρόκειται για μετάθεση έξι στοιχείων, δηλαδή

$$M_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

- <u>Παράδειγμα</u>: με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να διαταχθεί στο γήπεδο μια μπάσκετ; Πρόκειται για πέντε διαφορετικά άτομα άρα το πλήθος είναι

$$M_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

- <u>Διατάξεις</u>: έστω ένα σύνολο A με n στοιχεία. Κάθε ένα από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε k διαφορετικά στοιχεία από το A και να τα βάλουμε σε μία σειρά, λέγεται διάταξη των n στοιχείων ανά k

- Δυο διατάξεις είναι διαφορετικές όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο της μιας δεν περιέχεται στην άλλη ή αν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία, τότε υπάρχει ένα στοιχείο που να είναι σε διαφορετικές θέσεις στις δυο διατάξεις

- Σε κάθε διάταξη k στοιχείων, κάθε στοιχείο περιέχεται μόνο μια φορά
- Το πλήθος των διατάξεων των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με Δ_k^n και δίνεται από τον τύπο $\Delta_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

- <u>Παράδειγμα</u>: πόσοι τριψήφιοι αριθμοί με <u>διαφορετικά</u> ψηφία μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τους αριθμούς {1,2,3,4,5,6};

- Όσες οι διατάξεις των 6 ανά 3, δηλαδή

$$\Delta_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 120$$

- Άρα μπορούν να σχηματιστούν 120 αριθμοί

- <u>Παράδειγμα</u>: πόσοι τριψήφιοι αριθμοί με <u>διαφορετικά</u> ψηφία μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τους αριθμούς {0,1,2,3,4,5,6};

- Υπάρχει περιορισμός: το πρώτο ψηφίο επιλέγεται μόνο με έξι τρόπους {1,2,3,4,5,6} (το μηδέν όχι).

  Τα υπόλοιπα δυο ψηφία επιλέγονται με τόσους τρόπους όσες είναι οι διατάξεις των 6 ανά 2:

$$\Delta_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$$

- Σύμφωνα με την αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των τριψήφιων αριθμών είναι $6 \cdot 30 = 180$

- Συνδυασμοί: έστω ένα σύνολο Α με n στοιχεία. Κάθε υποσύνολο του Α με k στοιχεία καλείται συνδυασμός των n στοιχείων του Α ανά k
  - Δυο συνδυασμοί n ανά k είναι διαφορετικοί όταν δεν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία
  - Ενδιαφερόμαστε για τη φύση των αντικειμένων που διαλέγουμε κι όχι για τη μεταξύ τους θέση σε κάθε συνδυασμό
  - Πρέπει να ισχύει $(k \leq n)$

- Το πλήθος των συνδυασμών n ανά k συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και δίνεται από τον τύπο: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$$

- Ισχύει: $$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad 0! = 1$$

- Παράδειγμα: με πόσους τρόπους εννέα αντικείμενα μπορούν να διαχωριστούν σε τρεις ομάδες, έτσι ώστε η πρώτη ομάδα να περιέχει τέσσερα αντικείμενα, η δεύτερη ομάδα τρία αντικείμενα και η τρίτη ομάδα δυο;
  - Πρώτη ομάδα (4 αντικείμενα): όσοι είναι οι συνδυασμοί των 9 ανά 4:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

- Δεύτερη ομάδα (3 αντικείμενα): όσοι είναι οι συνδυασμοί των 5 ανά 3 (έχουν απομείνει 5 αντικείμενα): $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- Τρίτη ομάδα (2 αντικείμενα): όσοι είναι οι συνδυασμοί των 2 ανά 2 (έχουν απομείνει 2 αντικείμενα): $\binom{2}{2} = 1$
- Άρα συνολικά τα αντικείμενα μπορούν να διαχωριστούν με $126 \cdot 10 \cdot 1 = 1260$ τρόπους, σύμφωνα με την αρχή απαρίθμησης

- Παράδειγμα: έστω οι λέξεις που σχηματίζονται από τα γράμματα {Α,Β,Γ,α,β,γ} (το καθένα χρησιμοποιείται μια φορά)
  - Το σύνολο των λέξεων είναι όσες οι μεταθέσεις των έξι στοιχείων

$$M_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

  - Έστω το ενδεχόμενο Α: ‘Η λέξη αρχίζει με κεφαλαίο φωνήεν και τελειώνει σε μικρό φωνήεν’
  - Πρώτο γράμμα: επιλέγεται μόνο με έναν τρόπο (έχουμε διαθέσιμο μόνο ένα κεφαλαίο φωνήεν)

- Έκτο γράμμα: επιλέγεται με έναν τρόπο (έχουμε διαθέσιμο μόνο ένα μικρό φωνήεν)
- Υπόλοιπα γράμματα: επιλέγονται με τόσους τρόπους όσες οι μεταθέσεις των τεσσάρων στοιχείων που απέμειναν (έχουμε ήδη γράμματα στην πρώτη και τελευταία θέση)

$$M_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

- Άρα άρα συνολικά 24 αριθμοί (αρχή απαρίθμησης)
- Η πιθανότητα του Α είναι P(A)=24/720=1/30

- Παράδειγμα: έστω οι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία που σχηματίζονται από τα {0,1,2,3,4,5}
  - Πρώτο ψηφίο: επιλέγεται με 5 τρόπους (εξαιρείται το 0)
  - Υπόλοιπα ψηφία: επιλέγονται με τόσους τρόπους όσες οι διατάξεις των 5 ανά 3

$$\Delta_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

- Το πλήθος όλων των τετραψηφίων αριθμών είναι $5 \cdot 60 = 300$ (αρχή απαρίθμησης)

- Έστω το ενδεχόμενο A: ‘O αριθμός έχει τα δυο πρώτα ψηφία άρτια και τα δύο τελευταία περιττά’
- Πρώτο ψηφίο: επιλέγεται με δυο τρόπους (εξαιρείται το 0)
- Δεύτερο ψηφίο: επιλέγεται με δυο τρόπους (το πρώτο έχει ήδη έναν άρτιο)
- Τα δυο τελευταία ψηφία: επιλέγονται με τόσους τρόπους όσες οι διατάξεις των 3 ανά 2

$$\Delta_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 24$$

- Το πλήθος των αριθμών με τα δυο πρώτα ψηφία άρτια και τα δύο τελευταία περιττά είναι $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ (αρχή απαρίθμησης)

- Η πιθανότητα του Α είναι P(A)=24/300=2/25

- Παράδειγμα: έστω μια τετραμελής επιτροπή που εκλέγεται από έξι καθηγητές και δέκα μαθητές
  - Το σύνολο όλων των τετραμελών επιτροπών είναι όσοι οι συνδυασμοί των 16 ανά 4

$$\binom{16}{4} = \frac{16!}{4!(16-4)!} = 1820$$

  - Έστω το ενδεχόμενο Α: ‘Η επιτροπή που επιλέγεται να αποτελείται από δυο καθηγητές και 2 μαθητές’

- Οι καθηγητές επιλέγονται με τόσους τρόπους όσοι οι συνδυασμοί των 6 ανά 2

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

- Οι μαθητές επιλέγονται με τόσους τρόπους όσοι οι συνδυασμοί των 10 ανά 2

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

- Το πλήθος των επιτροπών με δυο καθηγητές και δυο μαθητές είναι $15 \cdot 45 = 675$ (αρχή απαρίθμησης)

- Η πιθανότητα του Α είναι P(A)= 675/1820= 135/364

- Δεσμευμένη πιθανότητα: έστω Ω ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος και Β ένα ενδεχόμενο με P(B)>0. Η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο Α δοθέντος ότι το Β έχει ήδη συμβεί λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του Α δοθέντος του Β

$$P(A/B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

- Ισχύει:

  - $P(A/B) \geq 0$
  - $P(B/B) = 1$
  - $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i / B)$

- <u>Παράδειγμα</u>: ρίπτονται δυο ζάρια, ένα κόκκινο και ένα πράσινο
- Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

Ένδειξη πράσινου ζαριού \ Ένδειξη κόκκινου ζαριού	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- Έστω τα ενδεχόμενα:

  A: ‘να έρθει άθροισμα μεγαλύτερο του 10’

  B: ‘το κόκκινο ζάρι να δείξει 5’
- Ο δειγματικός χώρος κάθε ενδεχομένου είναι:

  A: {(6,5),(5,6)(6,6)}

  B: {(1,5)(2,5)(3,5)(4,5)(5,5)(6,5)}

- P(A)=3/36, P(B)=6/36, $P(A \cap B) = 1/36$
- Άρα $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/6$$

- <u>Πολλαπλασιαστικός κανόνας</u>: Η δεσμευμένη πιθανότητα χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό πιθανότητας τομής ενδεχομένων
  - Ισχύει:

$$P(A\cap B)=P(A/B)P(B) \quad P(B)>0$$

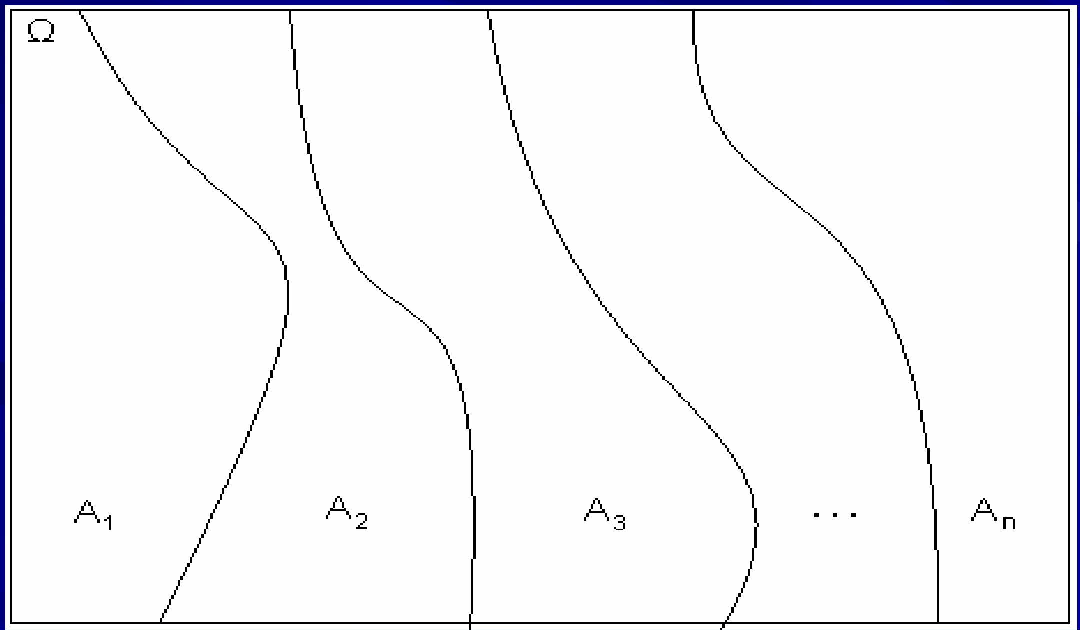
$$P(A\cap B)=P(B/A)P(A) \quad P(A)>0$$

  - Ο κανόνας επεκτείνεται σε περισσότερα ενδεχόμενα

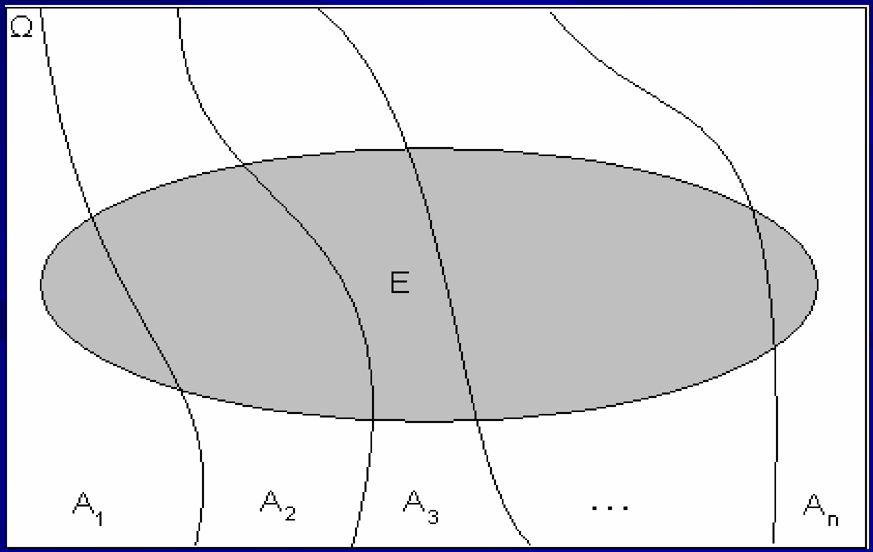
- Διαμέριση ενός συνόλου Ω: είναι μια συλλογή $A_1, A_2, \ldots, A_n$ από υποσύνολα του Ω που ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad i, j = (1, 2, \ldots, n)$$



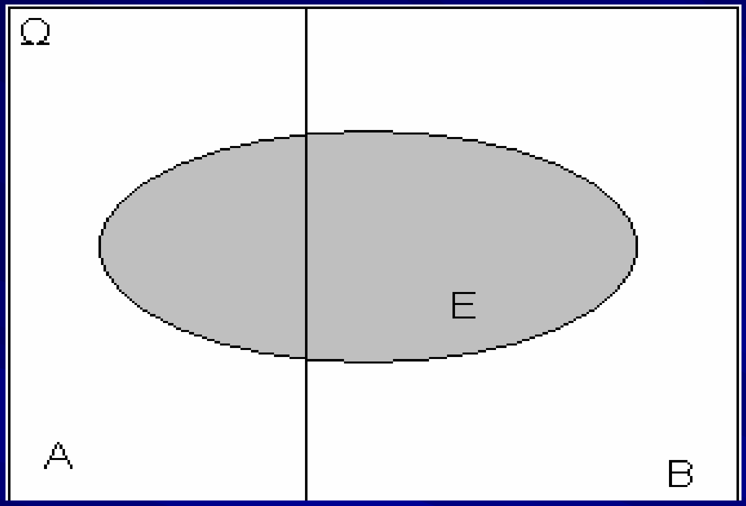
- <u>Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας</u>: έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μια διαμέριση ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A_i) \geq 0$. Έστω ένα ενδεχόμενο Ε. Η πιθανότητα του Ε υπολογίζεται μέσω των δεσμευμένων πιθανοτήτων του Ε σε σχέση με τα στοιχεία της διαμέρισης: $$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)$$



- Παράδειγμα: δυο μηχανές εργοστασίου παράγουν το 10% και το 90% αντίστοιχα της παραγωγής ενός προϊόντος. Η πρώτη παράγει με πιθανότητα 0,01 ελαττωματικό προϊόν και η δεύτερη με 0,05. Αν ένα αντικείμενο επιλεγεί στην τύχη, ποιά η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;
- A: το προϊόν παράγεται από την πρώτη μηχανή
- B: το προϊόν παράγεται από τη δεύτερη μηχανή
- E: το προϊόν είναι ελαττωματικό

- Ισχύει: $P(A) = 0,1 \quad P(B) = 0,9$

$$P(E/A) = 0,01 \quad P(E/B) = 0,05$$



- Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$P(E) = P(A)\cdot P(E/A) + P(B)\cdot P(E/B) =$$

$$0,1\cdot 0,01 + 0,9\cdot 0,05 = 0,046$$

- Θεώρημα Bayes: έστω $A_1, A_2, ..., A_n$ μια διαμέριση ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A_i) \geq 0$. Έστω ένα ενδεχόμενο Ε. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A_k μέσω των τομών του ενδεχομένου Ε (P(E)>0) και των στοιχείων της διαμέρισης είναι:

$$P(A_k / E) = \frac{P(E / A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E / A_i) \cdot P(A_i)}$$

- Παράδειγμα: (αναφορά σε προηγούμενο παράδειγμα δυο μηχανών παραγωγής ενός προϊόντος)
- Ένα αντικείμενο επιλέγεται στην τύχη και είναι ελαττωματικό. Ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από τη δεύτερη μηχανή;
-

$$P(B/E)=\frac{P(B)\cdot P(E/B)}{P(A)\cdot P(E/A)+P(B)\cdot P(E/B)}=$$

$$=\frac{0,9\cdot 0,05}{0,1\cdot 0,01+0,9\cdot 0,05}=0,978$$

- Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: δυο ενδεχόμενα Α,Β είναι ανεξάρτητα όταν η πιθανότητα να συμβεί το ένα δεν επηρεάζεται από το γεγονός ότι έχει συμβεί το άλλο.
- Ισχύει: $P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Τα παραπάνω επεκτείνονται σε περισσότερα ενδεχόμενα Α,Β,Γ:
  - $P(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \bigcap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$
  - $P(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) = P(A) \cdot P(B)$
  - $P(\mathrm{A} \bigcap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$
  - $P(\mathrm{B} \bigcap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$

- Αν τα ενδεχόμενα Α,Β είναι ανεξάρτητα, τότε τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους:
  - A, B'
  - A', B
  - A', B'

- Παράδειγμα: Έστω μια τράπουλα. Επιλέγεται ένα χαρτί στην τύχη. Έστω τα ενδεχόμενα:
- A: 'το χαρτί είναι άσσος'
- B: 'το χαρτί είναι σπαθί'
- Τότε ισχύει: P(A)= 4/52 = 1/13 και P(B)= 13/52 = 1/4
- Επίσης $P(A \cap B) = 1/52$
- Επειδή ισχύει $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ τα ενδεχόμενα A,B είναι ανεξάρτητα