Θέμα 1

Το κεντρικό ταχυδρομείο μίας επαρχιακής πόλης ανοίγει και τα Σάββατα από 9:00 μέχρι 13:00. Κατά μέσο όρο το επισκέπτονται 100 πελάτες ανά ώρα. Οι πελάτες καθώς προσέρχονται σχηματίζουν μία ουρά αναμονής με πειθαρχία FIFO. Το Σάββατο εργάζονται τρεις υπάλληλοι οι οποίοι έχουν ομοιόμορφη απόδοση. Ο μέσος χρόνος που χρειάζεται ένας υπάλληλος για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη είναι 1,5 λεπτά. Έρευνες που έχουν γίνει στο παρελθόν έδειξαν ότι η διαδικασία αφίξεων ακολουθεί κατανομή Poisson και ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή. Ο διευθυντής του καταστήματος δέχεται παράπονα από το κοινό ότι απαιτείται μεγάλος χρόνος αναμονής για να εξυπηρετηθούν. Από την άλλη πλευρά, οι τρεις υπάλληλοι που εργάζονται το Σάββατο έχουν καταθέσει έγγραφη διαμαρτυρία περί υπερβολικού φόρτου εργασίας. Ο διευθυντής θέλει να υπολογίσει τα κατάλληλα μέτρα λειτουργικότητας ώστε να μπορέσει να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα επί του θέματος αυτού. Επίσης δέχεται πιέσεις από τη γενική διεύθυνση να περικόψει τις δαπάνες για υπερωρίες μειώνοντας κατά ένα άτομο το προσωπικό του Σαββάτου. Για τους υπολογισμούς, ως στοιχειώδη μονάδα μέτρησης του χρόνου να χρησιμοποιήσετε την μία ώρα και να διατηρείτε τέσσερα δεκαδικά ψηφία στις πράξεις.

a. Σύμφωνα με τον κανονισμό λειτουργίας και της προδιαγραφές ποιότητας υπηρεσιών που έχει θεσπίσει η κεντρική διεύθυνση ταχυδρομείων, ο μέσος χρόνος αναμονής ενός τυπικού πελάτη δεν πρέπει να ξεπερνάει τα τρία λεπτά και το μέσο πλήθος πελατών σε μία ουρά αναμονής τυπικών εργασιών δεν πρέπει να ξεπερνάει τα τέσσερα άτομα. Βοηθήστε το διευθυντή να ελέγξει αν το σύστημα λειτουργεί σύμφωνα με τις προδιαγραφές ποιότητας. [50%]

b. Σύμφωνα με τη σύμβαση των εργαζομένων κάθε υπάλληλος έχει δικαίωμα πεντάλεπτου, κατά μέσο όρο, διαστήματος αδράνειας (όχι κατ' ανάγκη συνεχόμενου) ανά μία ώρα εργασίας. Βοηθήστε το διευθυντή να ελέγξει αν το σύστημα λειτουργεί σύμφωνα με τη σύμβαση εργασίας. [30%]

c. Ελέγξτε αν έχει νόημα η δυνατότητα μείωσης του προσωπικού κατά ένα άτομο. [20%]

Λύση Α.6

- *Το P_0 δίνεται από τον τύπο* $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\dfrac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$ *και μετά τις πράξεις*

για λ=100, μ=40 και s=3, προκύπτει ίσο με P_0 = 0,0449.

- *Το μέσο μήκος της ουράς αναμονής:* $L_q = \dfrac{(\lambda/\mu)^s\lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\cdot P_0$ *= 3,5112 πελάτες.*

- *Ο μέσος χρόνος αναμονής:* $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$ *= 0,0351*

Επομένως, ο μέσος χρόνος αναμονής W_q = 2,1067 < 3 και το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά είναι L_q = 3,5112 < 4. Άρα δεν παραβιάζονται οι προδιαγραφές ποιότητας των υπηρεσιών

Ερώτημα (b)

Ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος που έχει ήδη υπολογιστεί είναι ρ = (83,33% της ώρας) είναι κατά μέσο όρο 10 λεπτά αδρανής. δεν παραβιάζεται ούτε η σύμβαση των εργαζομένων

Ερώτημα (c)

Σε ό,τι αφορά τη μείωση του προσωπικού κατά ένα άτομο, θα πρέπει να θέσουμε s=2 οπότε έχουμε ότι

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{100}{2*40} = \frac{5}{4} > 1$$

Συνεπώς δεν πρέπει να γίνει μείωση του προσωπικού.

Θέμα 2

Σε μία επαρχιακή πόλη υπάρχουν δύο supermarkets Α και Β. Μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο το μερίδιο αγοράς μπορεί να επηρεαστεί από προωθητικές ενέργειες που μπορούν να εφαρμόσουν οι δύο αντίπαλοι. Πιο συγκεκριμένα ο διευθυντής κάθε καταστήματος αποφασίζει σε ποια κατηγορία προϊόντος θα εφαρμόσει στρατηγική μεγάλων εκπτώσεων και προσφορών με ταυτόχρονη διαφήμιση στο έντυπο του καταστήματος. Τα δύο καταστήματα έχουν τρεις κατηγορίες προϊόντων που είναι κοινές: Κρεοπωλείο, Κηπευτικά, Τυροκομικά ενώ το Β επιπλέον μπορεί να εφαρμόσει στρατηγική προσφορών και στο Αρτοπωλείο. Η αύξηση του εβδομαδιαίου μεριδίου αγοράς για το κατάστημα Α σε βάρος του Β, ανάλογα με τους συνδυασμούς στρατηγικής που μπορούν να εφαρμόσουν τα δύο καταστήματα δίνεται στον ακόλουθο πίνακα πληρωμών.

		Κατάστημα Β			
		Κρεοπωλείο	**Κηπευτικά**	**Τυροκομικά**	**Αρτοπωλείο**
Κατάστημα Α	**Κρεοπωλείο**	5	6	2	-2
	Κηπευτικά	-3	-4	-5	0
	Τυροκομικά	1	-3	2	-7

Προσδιορίστε την άριστη στρατηγική για κάθε πλευρά και την τιμή του παιγνιδιού. Ποιο είναι το φυσικό νόημα της τιμής του παιγνίου;

Λύση

		Κρεοπωλείο	Κηπευτικά	Τυροκομικά	Αρτοπωλείο	min
	Κρεοπωλείο	5	6	2	-2	-2
Κατάστημα A	Κηπευτικά	-3	-4	-5	0	-5
	Τυροκομικά	1	-3	2	-7	-7
	max	5	6	2	0	maxmin =-2

minimax=0

δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.

	y Τυροκομικά	1-y Αρτοπωλείο
x Κρεοπωλείο	2	-2
1-x Κηπευτικά	-5	0

2x - 5(1-x) = -2x + 0(1-x)

x=5/9=0,55 άρα 1-x = 0,45

2y –2(1-y) = -5y οπότε y= 2/9=0,22 και 1-y =0,78

Τιμή του παιγνίου V = –2×5/9 = –1,1

Θέμα 3

Στη βιομηχανία Β η γραμμή παραγωγής ενός συγκεκριμένου εξαρτήματος αυτοκινήτων παράγει ελαττωματικά εξαρτήματα με συχνότητα 8/1000. Πριν τα παραγόμενα εξαρτήματα προωθηθούν στην αγορά υποβάλλονται σε ειδικό ποιοτικό έλεγχο. Από ιστορικά στοιχεία που τηρεί η βιομηχανία, προκύπτει ότι ο έλεγχος αυτός δείχνει με πιθανότητα 98%, ότι ένα εξάρτημα έχει κάποιο σφάλμα, όταν αυτό όντως είναι ελαττωματικό και με πιθανότητα 95%, ότι ένα εξάρτημα δεν έχει κάποιο σφάλμα,, όταν αυτό όντως δεν είναι ελαττωματικό. Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογιστούν:

(i) Η πιθανότητα ο έλεγχος να δώσει λάθος ένδειξη.. **(30%)**

(ii) Το ποσοστό των παραγόμενων εξαρτημάτων που ο έλεγχος δείχνει ότι έχουν κάποιο σφάλμα .... **(30%)**

(iii) Η πιθανότητα ένα εξάρτημα, που ο έλεγχος έδειξε ότι έχει κάποιο σφάλμα, να μην είναι ελαττωματικό... **(40%)**

<u>Λύση</u>

E: το ενδεχόμενο το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό

Σ: ο έλεγχος να δείξει ότι το ενδεχόμενο έχει κάποιο σφάλμα

Έχουμε: $P(E)=0.008 \Rightarrow P(E')=0.992$.

Ακόμα έχουμε ότι : $P(\Sigma|E)=0.98 \Rightarrow P(\Sigma'|E)=0.02$

και $P(\Sigma'|E')=0.95 \Rightarrow P(\Sigma|E')=0.05$

Ζητάμε:

(i) Την **πιθανότητα** $P(\Sigma|E')+P(\Sigma'|E)$**:**

$$P(\Sigma|E')+P(\Sigma'|E)=0.05+0.02=0.07$$

(ii) Ζητάμε την πιθανότητα $P(\Sigma)$.

Από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P(\Sigma) &= P(\Sigma|E)P(E)+P(\Sigma|E')P(E') \\ &= 0.98*0.008+0.05*0.992 \\ &= 0.00784+0.0496=0.05744 \end{aligned}$$

(iii) Ζητάμε την πιθανότητα $P(E'|\Sigma)$.

Από το θεώρημα του Bayes προκύπτει ότι:

$$P\left(E'|\Sigma\right) = \frac{P(E')P\left(\Sigma|E'\right)}{P\left(\Sigma\right)}$$

$$= \frac{0.992 * 0.05}{0.05744} = \frac{0.0496}{0.05744} = 0.8635$$

Θέμα 4

Από τυχαίο δείγμα, που αποτελείται από 6 συσκευασίες μπαταριών διαφόρων τύπων, προέκυψαν τα παρακάτω δεδομένα (Πίνακας Β) σχετικά με την τιμή τους (X) σε € και τον αριθμό μπαταριών που περιέχονται σε κάθε συσκευασία (Y).

Πίνακας Β

X	2	4	3	2	3	4
Y	3	8	5	4	6	10

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία και αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι οι μεταβλητές X και Y συνδέονται με γραμμική σχέση:

(i) Να εκτιμηθεί η ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στη X ....**(40%)**

(ii) Να ερμηνευθεί ο συντελεστής της μεταβλητής X στη ευθεία παλινδρόμησης..........**(15%)**

(iii) Να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης και να ερμηνευτεί.................................**(15%)**

(iv) Να υπολογισθεί ο συντελεστής προσδιορισμού και να ερμηνευτεί...........................**(15%)**

(v) Να εκτιμηθεί η τιμή μιας συσκευασίας με 6 μπαταρίες ....**(15%)**

Λύση

X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$Y_i - \bar{Y}$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})*(Y_i - \bar{Y})$
2	3	-1	1	-3	9	3
4	8	1	1	2	4	2
3	5	0	0	-1	1	0
2	4	-1	1	-2	4	2
3	6	0	0	0	0	0
4	10	1	1	4	16	4

Υπολογισμός βοηθητικών στοιχείων

$\bar{X} = \frac{18}{6} = 3$, $\quad \bar{Y} = \frac{36}{6} = 6$

$S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = 4$

$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 34$

$S_{XY} = S_{YX} = \sum (X_i - \bar{X})*(Y_i - \bar{Y}) = 11$

(i) Η ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στη X είναι $\widehat{Y} = \alpha + \beta X$

$$a = \bar{Y} - \frac{S_{XY}}{S_{XX}} * \bar{X} = 6 - \frac{11}{4} * 3 \Rightarrow a = -2,25$$

$$\beta = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{11}{4} \Rightarrow \beta = 2,75$$

Άρα, $\widehat{Y} = -2,25 + 2,75X$

(ii) Ερμηνεία του συντελεστή β: Ο συντελεστής κλίσης $(\beta = 2,75)$ εκφράζει την επίδραση στην αναμενόμενη τιμή της Y που προκαλεί η μεταβολή της X κατά μια μονάδα. Επομένως αν αυξηθεί ο πλήθος των μπαταριών σε κάποια συσκευασία κατά 1 μονάδα η μέση αύξηση αναμένεται ίση με 2,75 €.

(iii) **Ο συντελεστής συσχέτισης** είναι:

$$r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} * S_{YY}}} = \frac{11}{\sqrt{4*34}} = \frac{11}{\sqrt{136}} = \frac{11}{11,6619} = 0,9432$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ του αριθμού μπαταριών στη συσκευασία και της τιμής της.

(iv) **Ο συντελεστής προσδιορισμού** είναι:

$$R^2 = \beta * \frac{S_{XY}}{S_{YY}} = 2,75 * \frac{11}{34} = 0,89$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή του πλήθους των μπαταριών ανά συσκευασία ερμηνεύει το 89 % της μεταβλητότητας της τιμής της συσκευασίας.

.

(v) Η ευθεία παλινδρόμησης είναι:

$$\widehat{Y} = -2,25 + 2,75X$$

Για $X=6$ έχουμε $\widehat{Y} = -2.25 + 2,75*6 = 14,25$

Άρα, όταν μία συσκευασία περιλαμβάνει 6 μπαταρίες, με βάση το μοντέλο που εκτιμήθηκε, αναμένεται να κοστίζει 14,25 €.

Θέμα 5

α. Στο ταμείο ενός super market, κατά την τελευταία ώρα λειτουργίας του, ο μέσος αριθμός πελατών που περιμένουν στην ουρά για να πληρώσουν είναι 4 πελάτες το πεντάλεπτο. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

(i) Να υπάρχουν τουλάχιστον 3 πελάτες στην ουρά, 10 λεπτά πριν το κλείσιμο........**(25%)**

(ii) Ένας πελάτης που φθάνει στο ταμείο δύο λεπτά πριν το κλείσιμο, να βρει το πολύ έναν πελάτη που περιμένει στην ουρά για να πληρώσει ....**(25%)**

Λύση

α (i)

Το πλήθος X των πελατών που περιμένουν στην ουρά ακολουθεί κατανομή Poisson και έχει μέσο λ = 4 πελάτες ανά 5 λεπτά δηλαδή με $\lambda = \frac{4}{5}$ = 0,8 πελάτες ανά λεπτό.

P(να υπάρχουν τουλάχιστον 3 πελάτες στην ουρά, 10 λεπτά πριν το κλείσιμο) =

$P(X\geq 3|\ \lambda=10*0,8) = 1-P(X<3|\lambda=8) = 1-P(X=0|\lambda=8)-P(X=1|\lambda=8) -P(X=2|\lambda=8)$ =

$$1-e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}-e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}-e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}=1-e^{-8}\frac{8^0}{0!}-e^{-8}\frac{8^1}{1!}-e^{-8}\frac{8^2}{2!}$$

$$=1-e^{-8}-8e^{-8}-32e^{-8}$$
$$=1-41e^{-8}=1-0.0137=0.9863$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,9863.

Θέμα 6

Δίνονται το μήκος (σε μικροχιλιοστά) και το βάρος (σε γραμμάρια) ενός τυχαίου δείγματος 12 μικροεπεξεργαστών από την ημερήσια παραγωγή ενός εργοστασίου.

Μήκος (x)	10	12	11	13	12	16	14	20	19	21	23	21
Βάρος (y)	18	21	18	23	22	25	24	26	25	27	31	28

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

(α) Να υπολογισθούν η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο του μήκους των μικροεπεξεργαστών. [35%]

(β) Να διερευνηθεί ποια από τις δύο μεταβλητές (μήκος ή βάρος) παρουσιάζει τη μεγαλύτερη μεταβλητότητα, δεδομένου ότι η μέση τιμή και η διακύμανση του βάρους είναι 24 και 15,091, αντίστοιχα. [10%]

(γ) Εάν υποθέσουμε ότι οι δύο μεταβλητές συνδέονται με γραμμική σχέση, να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης και να ερμηνευθεί. [55%]

Λύση

(α) *Διατάσσω τα δεδομένα σε αύξουσα τάξη:*

Μήκος (x)	10	11	12	12	13	14	16	19	20	21	21	23

$$M = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{12+1}{2}} = X_{\frac{13}{2}} = X_{6,5} = X_6 + 0,5*(X_7 - X_6) = 14 + 0,5*(16-14) = 15$$

$$Q_1 = X_{\frac{n+1}{4}} = X_{\frac{12+1}{4}} = X_{\frac{13}{4}} = X_{3.25} = X_3 + 0,25*(X_4 - X_3) = 12 + 0,25*(12-12) = 12$$

$$Q_1 = X_{\frac{3(n+1)}{4}} = X_{\frac{3(12+1)}{4}} = X_{\frac{39}{4}} = X_{9,75} = X_9 + 0,75*(X_{10} - X_9) = 20 + 0,75*(21-20) = 20,75$$

X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$Y_i - \bar{Y}$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
10	18	–6	36	–6	36	36
11	18	–5	25	–6	36	30
12	21	–4	16	–3	9	12
12	22	–4	16	–2	4	8
13	23	–3	9	–1	1	3
14	24	–2	4	0	0	0
16	25	0	0	1	1	0
19	25	3	9	1	1	3
20	26	4	16	2	4	8
21	27	5	25	3	9	15
21	28	5	25	4	16	20
23	31	7	49	7	49	49
192	**288**		**230**		**166**	**184**

(β) *Ο **Συντελεστής Μεταβλητότητας** δίνεται από τον τύπο:*

$$CV = \frac{s}{\overline{X}} * 100 \qquad (1)$$

Επομένως πρέπει να υπολογισθεί πρώτα ο αριθμητικός μέσος και η τυπική απόκλιση των τυχαίων μεταβλητών μήκος και βάρος των μικροεπεξεργαστών.

Μήκος των μικροεπεξεργαστών

Αριθμητικός Μέσος

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{192}{12} = 16$$

Τυπική Απόκλιση

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{230}{11} = 20,909$$

ή εναλλακτικά

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\overline{X}$, s *στην (1) υπολογίζεται ο συντελεστής μεταβλητότητας για το μήκος των μικροεπεξεργαστών:*

$$CV = \frac{s}{\overline{X}} * 100 = \frac{4,573}{16} * 100 = 0,28581 \cdot 100 = 28,581$$

Βάρος των μικροεπεξεργαστών

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\overline{X}$, s *στην (1) υπολογίζεται ο συντελεστής μεταβλητότητας για το βάρος των μικροεπεξεργαστών:*

$$CV = \frac{s}{\overline{Y}} * 100 = \frac{3,885}{24} * 100 = 16,187 \cong 16,19$$

Τελικά, η μεγαλύτερη μεταβλητότητα παρουσιάζεται στο μήκος των μικροεπεξεργαστών.

(γ) *Ο **συντελεστής συσχέτισης** δίνεται από τον τύπο:*

$$r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} * S_{YY}}}$$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

$$S_{XX} = \sum (X_i - \overline{X})^2 = 230$$

$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 166$$

$$S_{XY} = S_{YX} = \sum (X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y}) = 184$$

Εναλλακτικά:

$$S_{XX} = \sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n} = 3302 - \frac{192^2}{12} = 3302 - \frac{36864}{12} = 3302 - 3072 = 230$$

$$S_{YY} = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n} = 7078 - \frac{288^2}{12} = 7078 - \frac{82944}{12} = 7078 - 6912 = 166$$

$$S_{XY} = S_{YX} = \sum X_i Y_i - \frac{\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n} = 4792 - \frac{192 * 288}{12} = 4792 - \frac{55296}{12} = 4792 - 4608 = 184$$

Επομένως $r = \dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} * S_{YY}}} = \dfrac{184}{\sqrt{166 * 230}} = \dfrac{184}{\sqrt{38.180}} = \dfrac{184}{195,4073} = 0,941$

Άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική συσχέτιση μεταξύ του μήκους και του βάρους των μικροεπεξεργαστών.

Θέμα 7

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει φούρνους μικροκυμάτων για τους οποίους ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση της πρώτης βλάβης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 4 έτη και τυπική απόκλιση 1,2 έτη.

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

(α) Να υπολογισθεί η πιθανότητα ένας φούρνος μικροκυμάτων του συγκεκριμένου εργοστασίου να μην χρειαστεί επισκευή πριν από 5,5 έτη λειτουργίας του. [40%]

(β) Στα πλαίσια της πολιτικής προσέλκυσης πελατών το εργοστάσιο θέλει να καθορίσει μια περίοδο εγγύησης για τους φούρνους μικροκυμάτων έτσι ώστε αν κάποιος από αυτούς παρουσιάσει βλάβη πριν τη συμπλήρωση της περιόδου αυτής να αντικαθίστανται. Να προσδιοριστεί η περίοδος εγγύησης ώστε το εργοστάσιο να μην αντικαθιστά περισσότερους από το 5% των φούρνων που έχει πουλήσει. [40%]

(γ) Σε ένα εστιατόριο πουλήθηκαν 2 φούρνοι μικροκυμάτων του συγκεκριμένου εργοστασίου. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ο ένας από αυτούς να παρουσιάσει βλάβη πριν τη συμπλήρωση του χρόνου της εγγύησης. [20%]

Λύση Α.4

$$P(X>5,5)=P\left(\frac{X-4}{1,2}>\frac{5,5-4}{1,2}\right)=P\left(Z>\frac{1,5}{1,2}\right)=P(Z>1,25)=1-P(Z<1,25)=$$

$$=1-F(1{,}25)=1-0{,}8944=0{,}1056$$

(β) *Έστω Π η ζητούμενη περίοδος εγγύησης. Για να ικανοποιείται η απαίτηση του κατασκευαστή θα πρέπει η πιθανότητα ένας φούρνος μικροκυμάτων να παρουσιάσει βλάβη μέσα στο χρόνο εγγύησης να είναι 0,05.*

Άρα

$$P(X<\Pi)\le 0{,}05 \Rightarrow P\left(\frac{X-4}{1{,}2}<\frac{\Pi-4}{1{,}2}\right)\le 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z<\frac{\Pi-4}{1{,}2}\right)\le 0{,}05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-P\left(Z<\frac{\Pi-4}{1{,}2}\right)\ge 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z<-\frac{\Pi-4}{1{,}2}\right)\ge 0{,}95 \Rightarrow -\frac{\Pi-4}{1{,}2}\ge 1{,}645 \Rightarrow \Pi\le 2{,}026\cong 2$$

Συνεπώς η περίοδος εγγύησης πρέπει να είναι 2 χρόνια.

+

Θέμα 8

Δεκαπέντε άτομα, τα οποία αποφασίζουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, πρέπει να επιλέξουν μεταξύ δύο επενδυτικών σχεδίων E_1 και E_2 για να τοποθετήσουν το κεφάλαιό τους. Αν από ιστορικά στοιχεία γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα επένδυσης στο σχέδιο E_1 είναι κατά 50% μεγαλύτερη από την πιθανότητα επένδυσης στο σχέδιο E_2, να υπολογισθεί η πιθανότητα 10 από τα 15 άτομα να επιλέξουν το ίδιο επενδυτικό σχέδιο.

Λύση Β.4

(α) *Έστω τα ενδεχόμενα:*

- *E1: επιλογή επενδυτικού σχεδίου E1*
- *E2: επιλογή επενδυτικού σχεδίου E2*

Δίνεται ότι:

$$P(\mathrm{E}_1)=1,5P(\mathrm{E}_2)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

$$P(\mathrm{E}_1)+P(\mathrm{E}_2)=1 \rightarrow 1,5P(\mathrm{E}_2)+P(\mathrm{E}_2)=1 \rightarrow 2,5P(\mathrm{E}_2)=1 \rightarrow P(\mathrm{E}_2)=1/2,5 \rightarrow P(\mathrm{E}_2)=0,4$$

Άρα $P(\mathrm{E}_1)=0,6$

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 όπου:

- *X_1 ο αριθμός των ατόμων που επιλέγουν το επενδυτικό σχέδιο E_1*

- *X_2 ο αριθμός των ατόμων που επιλέγουν το επενδυτικό σχέδιο E_2*

Προφανώς $X_1 \sim B\ (n=15,\ p_1=0{,}6)$ και $X_2 \sim B\ (n=15,\ p_2=0{,}4)$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

P(10 άτομα επενδύουν στο ίδιο σχέδιο) =

= P(10 άτομα επενδύουν στο E_1 ή στο E_2) =

= P(10 άτομα επενδύουν στο E_1)+P(10 άτομα επενδύουν στο E_2) =

$= P(X=10 \mid n=15\ ,\ p_1=0{,}6) + P(X=10 \mid n=15\ ,\ p_2=0{,}4)$

$$= \binom{15}{10} \times 0{,}6^{10} \times 0{,}4^{5} + \binom{15}{10} \times 0{,}4^{10} \times 0{,}6^{5} =$$

$$\frac{15!}{5!*10!} * 0,6^{10} * 0,4^{5} + \frac{15!}{5!*10!} * 0,4^{10} * 0,6^{5} = 3003 * 0,006 * 0,01 + 3003 * 0,0001 * 0,07$$

= 0,1859 + 0,0245

= 0,2104

(