ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι πρώτης τάξεως των συναρτήσεων

α) $f(x)=(5x-3)^2$ β) $g(x)=(x^2-1)\ln(x^2+1)$ γ) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Λύση άσκησης 1

(α) $f(x)=(5x-3)^2 \Rightarrow f'(x)=2(5x-3)(5x-3)'$

$$\Rightarrow f'(x)=10(5x-3)$$

(β) $g(x)=(x^2-1)\ln(x^2+1) \Rightarrow g'(x)=2x\ln(x^2+1)+(x^2-1)\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}$

$$\Rightarrow g'(x)=2x\ln(x^2+1)+(x^2-1)\frac{2x}{x^2+1}$$

(γ) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς ενός προϊόντος, δίνονται από τις σχέσεις $P=76-2Q$ και $P=-Q^2+18Q+2$ αντίστοιχα. Να προσδιοριστούν τα παρακάτω:

(α) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης προσφοράς (η συνάρτηση προσφοράς πρέπει να είναι αύξουσα συνάρτηση).

(β) Η ελαστικότητα ζήτησης (ως προς την τιμή) και η ελαστικότητα προσφοράς (ως προς την τιμή) στο σημείο ισορροπίας.

Λύση άσκησης 2

Πρέπει P_s>0⇒ $-Q^2+18Q+2$>0

(α) Δ=324-4(-1) ·2⇒Δ=332

Q=$\frac{-18\pm\sqrt{332}}{-2}$

Q=$\frac{-18\pm 18{,}22}{-2} \Rightarrow Q1 = 18{,}11\; ή\; Q2 = \frac{0{,}22}{-2} = -0{,}11$

Επομένως 0<Q<18,11 (1)

Επίσης πρέπει P_s’>0⇒-2Q+18>0⇒0<Q<9 (2)

Από τις σχέσεις (!) και (2) το πεδιο ορισμού είναι 0<Q<9 $και\;\; 2 \le P \le 83$.

Το πεδίο τιμών είναι από $P = 2$ **έως** $P = -9^2 + 18\cdot 9 + 2 = 83$ **έως** $P = 83$

(β) P_d=P_s (σημείο ισορροπίας)

$$\Rightarrow 76 - 2Q = -Q^2 + 180 + 2 \Rightarrow$$

$$Q^2 - 20Q + 74 = 0$$

Δ=20^2-4· $1 \cdot 74 = 400 - 296 = 104$

$Q = \frac{20\pm\sqrt{104}}{2} = \frac{20\pm 10{,}19}{2}$ ⇒Q_1=15,1 ή Q_2=4,9

Δεκτή ποσότητα ισορροπίας είναι Q=4,9 (ανήκει στο πεδίο ορισμού του προηγούμενου ερωτήματος)

Άρα η τιμή ισορροπίας

P_d=76-2·4,9=66,2

P_s=-4,9^2+18·4,,9+2=-24+88,2+2=

⇒P_s=66,2

β)Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή

$E_{d=}Q_d{}' \cdot \frac{P}{Q_d} \Rightarrow E_{d=} \frac{1}{P'_d} \cdot \frac{P}{Q_d} \Rightarrow$

$E_{d=} \frac{1}{-2} \cdot \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ (P,Q) το σημείο ισορροπίας⇒

$E_{d=} -\frac{1}{2} \cdot \frac{66{,}2}{4{,}9} = -6{,}75$

Η ελαστικότητα προσφοράς

$$E_s = Q'_s \cdot \frac{P}{Q_s} \Rightarrow E_s = \frac{1}{P'_s} \cdot \frac{P}{Q} \Rightarrow E_s = \frac{1}{-2Q+18} \cdot \frac{66{,}2}{4{,}9} =$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{1}{-2 \cdot 4{,}9 + 18} \cdot \frac{66{,}2}{4{,}9} = \frac{1}{8} \cdot 13{,}51 = 1{,}68$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της πρώτης και δεύτερης παραγώγου, να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής, της συνάρτησης:

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x - 17$$

στο πεδίο ορισμού της.

Λύση άσκησης 3

1)f'(x)=$12x^3 - 48x^2 + 12x + 72$

=12$(x^3 - 4x^2 + x + 6)$

Με σχήμα Horner

1	-4	1	6	-1
	-1	5	-1	
1	-5	6	0	

Άρα f'(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=0⇒x=-1 ή x^2-5x+6=0⇒x=2 ή x=3

Επίσης f''(x)=12(3x^2-8x+1)

Για x=2⇒f''(2)=12(3·2^2-8·2+1)=12· $(-3) < 0$

Για $x=3 \Rightarrow f''(3)=12(3\cdot 3^2-8\cdot 3+1)=12\cdot(4)>0$

Για $x=2$ η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(2)=3\cdot 2^4-16\cdot 2^3+6\cdot 2^2+72\cdot 2-17 \Rightarrow$

$f(2)=48-128+24+144-17=71$ τοπική μέγιστη τιμή

Για $x=3 \Rightarrow f(3)=3\cdot 3^4-16\cdot 3^3+6\cdot 3^2+72\cdot 3-17$

$f(3)=243-432+54+216-17$

$f(3)=496$ ολικό ελάχιστο

Για $x=-1 \Rightarrow f(-1)=3(-1)^4-16(-1)^3+6(-1)^2+72(-1)-17$

$f(-1)=3+16-6-72-17$

$f(-1)=-76$ η ελάχιστη τιμή

άρα για $\chi=-1$ η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $f''(\chi)=12(3(-1)^2-8(-1)+1)$

$=12(3+8+1)>0$

$f''(x)=0 \Rightarrow 12(3x^2-8x+1)=0$

$\Delta=64-12=54$

$x=\frac{8\pm\sqrt{52}}{6}=\frac{8\pm 7{,}21}{6} \Rightarrow x_1=2{,}53$ ή $x_2=0{,}13$

Η $f(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=2{,}53$ και $x=0{,}13$

x	-∞		-1		0,13		2		2,53		3		+∞
f'(x)		-	0	+		+	0	-		-	0	+	
f''(x)		+		+	0	-		-	0	+		+	
f(x)		↘		↗		↗		↘		↘		↗	
			min		σ.κ.		max		σ.κ.		min		

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίδεται η συνάρτηση μεταβλητού κόστους:

$$VC(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ$$

Να αποδείξετε ότι: αν η συνάρτηση μέσου μεταβλητού κόστους, $AVC(Q)$, παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο, έστω Q_0, τότε ικανοποιείται η σχέση $AVC(Q_0) = MVC(Q_0)$, όπου $MVC(Q)$, η συνάρτηση οριακού μεταβλητού κόστους.

<u>Λύση άσκησης 4</u>

VC(Q)=a$Q^3 + bQ^3 cQ$

MVC(Q)=3a$Q^2 + 2bQ + c$

Επίσης AVC(Q_0)=$\frac{VC(Q_0)}{Q_0} = \frac{aQ_0^3 + bQ_0^2 + cQ_0}{Q_0} \Rightarrow$

AVC(Q_0)=a$Q_0^2 + Q_0 + c$

AVC'(Q)=$\left(\frac{VC(Q)}{Q}\right)' \Rightarrow$

AVC'(Q)=$\frac{MVC(Q)\cdot - VC(Q)}{Q^2}$ και για Q=Q_0 υπάρχει ακρότατο, τότε

AVC'(Q_0)=0⇒MVC(Q_0)Q_0-VC(Q_0)=0

⇒MVC(Q_0)=$\frac{VC(Q_0)}{Q_0}$

⇒MVC(Q_0)=AVC(Q_0)= $aQ_0^2 + bQ_0 + c$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Οι συναρτήσεις ολικών εσόδων και ολικού κόστους (σε χιλιάδες ευρώ) μίας επιχείρησης είναι αντίστοιχα:

$TR(Q) = 6Q$ και $TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q + 1$

όπου Q η παραγόμενη ποσότητα (σε τόνους).

Να μελετηθεί, αναλυτικά, ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση συνολικού κέρδους, $\Pi(Q)$. Πόσο είναι το μέγιστο κέρδος;

<u>Λύση άσκησης 5</u>

Π(Q)=TR(Q)-TC(Q) ⇒

Π(Q)=6Q-$\left(\frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q + 1\right) \Rightarrow$

Π(Q)= 6Q-$\frac{1}{3}Q^3 + \frac{7}{2}Q^2 - 12Q - 1 \Rightarrow$

Π(Q)=$-\frac{1}{3}Q^3 + \frac{7}{2}Q^2 - 6Q - 1 \Rightarrow$

Π'(Q)=- Q^2+7Q-6

Δ=7^2-4(-1) ·(-6)=49-24=25

Q=$\frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-2} \Rightarrow Q_1 = \frac{-2}{-2}$=1 ή $Q_2 = \frac{-12}{-2} = 6$

Π''(Q)=-2Q+7⇒

Π''(1)=570 άρα για Q=1 η συνάρτηση Π(Q) παρουσιάζει ελάχιστο κέρδος

Π'''(6)=-2·6+7=-5<0 άρα για Q=6 η συνάρτηση Π(Q) παρουσιάζει μέγιστο κέρδος.Το μέγιστο κέρδος είναι Π(6)=$-\frac{1}{6} \cdot 6^3 + \frac{7}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 - 1 = -72 + 126 - 37 = 17$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια επιχείρηση πωλεί εισιτήρια για δρομολόγια πλοίων. Την τρέχουσα περίοδο η τιμή του εισιτηρίου είναι 4€ και οι επιβάτες είναι 1800. Η τιμή P του εισιτηρίου και ο αριθμός Q των εισιτηρίων που πωλούνται, ικανοποιούν την σχέση ζήτησης: $P = \left(\frac{Q - 3000}{600}\right)^2$. Η επιχείρηση επιθυμεί να αυξήσει την τιμή του εισιτηρίου κατά 8%. Χρησιμοποιήστε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή, προκειμένου να συμβουλεύσετε την διοίκηση της επιχείρησης σχετικά με το ποσοστό αύξησης ή μείωσης των εσόδων της.

<u>Λύση άσκησης 6</u>

E_d=Q'd(P)$\cdot \frac{P}{Q_d(P)} \Rightarrow$

E_d=$\frac{1}{P'_{d(Q)}} \cdot \frac{P_d}{Q} \Rightarrow$

E_d= $\frac{1}{2\left(\frac{Q-3000}{600}\right)\cdot\frac{1}{600}} \cdot \frac{\left(\frac{Q-3000}{600}\right)^2}{Q} \Rightarrow$

E_d=$\frac{180.000}{Q-3000} \cdot \frac{(Q-3000)^2}{360.000Q^2} \Rightarrow$

E_d=$\frac{(Q-3000)^2}{2(Q-3000)Q} \Rightarrow$ E_d=$\frac{1}{2^2}(Q-3000)$ $\Rightarrow$ E_d=$\frac{1}{3600}(1800-3000) = -0{,}33$

Άρα για αύξηση εισιτηρίου κατά 8% η αναμενόμενη αύξηση είναι 8$\cdot$ 0,16 =12,8 χρηματικές μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Βιοτεχνία παρασκευάζει δύο χρώματα κατοικιών. Το χρώμα *E* για εξωτερικούς χώρους και το χρώμα *I* για εσωτερικούς χώρους. Για την παρασκευή των χρωμάτων χρησιμοποιεί δύο πρώτες ύλες, τις Α και Β. Η μέγιστη διαθέσιμη ποσότητα της Α είναι 6 τόνοι την ημέρα και της Β είναι 8 τόνοι την ημέρα, ενώ οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών για την παρασκευή των χρωμάτων *I* και *E* ανά τόνο ημερησίως δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Τόνοι πρώτων υλών ανά τόνο χρώματος		
	Εξωτερικό χρώμα (Ε)	Εσωτερικό χρώμα (Ι)	Διαθεσιμότητα
Πρώτη ύλη Α	1	2	6
Πρώτη ύλη Β	2	1	8

Έρευνα αγοράς έδειξε ότι η ημερήσια ζήτηση χρώματος *I* δεν υπερβαίνει εκείνης του *E* περισσότερο από 1 τόνο, ενώ η μέγιστη ημερήσια ζήτηση του χρώματος *I* περιορίζεται στους 2 τόνους. Η τιμή πώλησης του *E* είναι 3 χιλιάδες ευρώ τον τόνο και του *I* είναι 2 χιλιάδες ευρώ τον τόνο.

(α) Διατυπώστε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού η λύση του οποίου θα βοηθήσει τη βιοτεχνία να προγραμματίσει την ημερήσια παραγωγή των προϊόντων Ε και *I*, ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδά της. Να εξηγήσετε με σαφήνεια τις μεταβλητές απόφασης που χρησιμοποιείτε, την αντικειμενική συνάρτηση και το φυσικό νόημα των περιορισμών του μοντέλου που θα κατασκευάσετε.

(β) Σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων να κατασκευάσετε το χώρο των εφικτών λύσεων (εφικτή περιοχή). Να επεξηγήσετε πώς αυτός προκύπτει, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του και να τον σκιαγραφήσετε. Χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις γνωστές προσεγγίσεις της γραφικής επίλυσης να βρείτε τη βέλτιστη λύση και τη μέγιστη τιμή των εσόδων. Τι πρέπει να κάνει τελικά η βιοτεχνία;

<u>Λύση άσκησης 7</u>

<u>Ερώτημα α</u>

x_1 η ημερήσια παραγωγή του προϊόντος E (σε τόνους)

x_2 η ημερήσια παραγωγή του προϊόντος I (σε τόνους)

Αντικειμενική συνάρτηση $z = 3x_1 + 2x_2$ (κόστος σε χιλιάδες ευρώ) της οποίας ζητάμε το ελάχιστο

Περιορισμοί

πρώτη ύλη A $\quad x_1 + 2x_2 \le 6$

πρώτη ύλη B $\quad 2x_1 + x_2 \le 8$

Επίσης $\quad x_2 \le x_1 + 1 \Rightarrow -x_1 + x_2 \le 1$

και $\quad x_2 \le 2$

επιπλέον $\quad x_1, x_2 > 0$

<u>Ερώτημα β</u>

για την κορυφή K: $\left.\begin{array}{r} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array}$

για την κορυφή E: $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{array}$

για την κορυφή C: $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{array}\right\}$

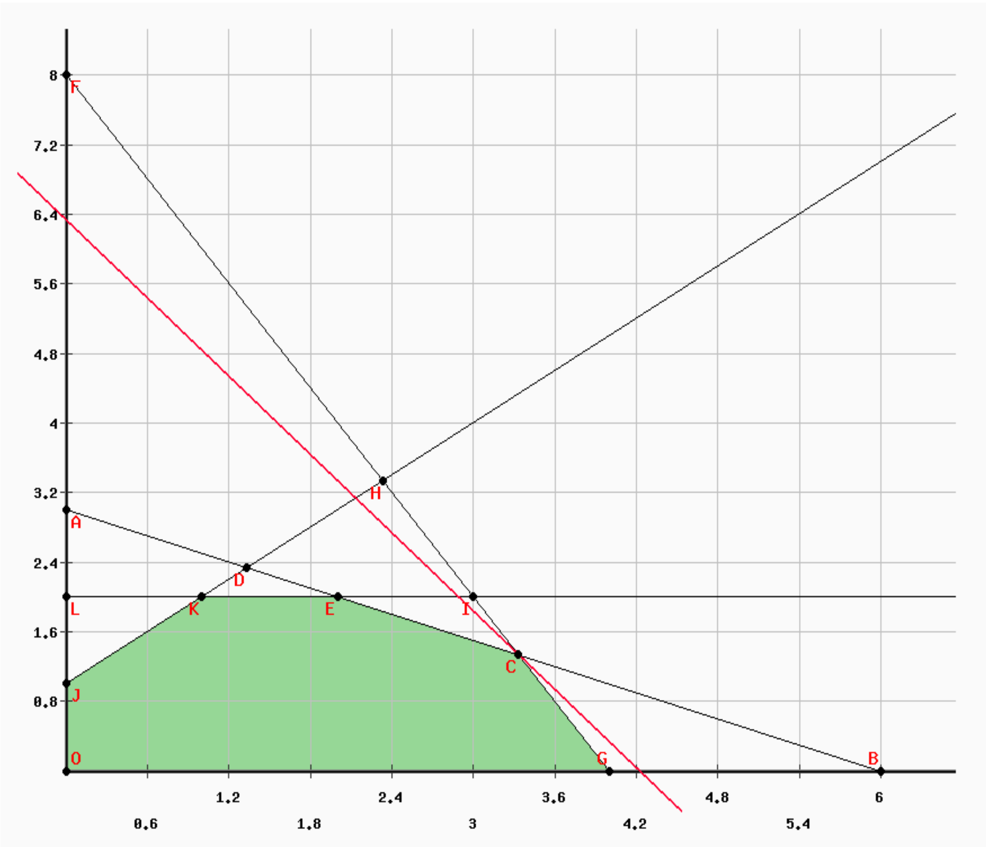
$x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow$

$6 - 3x_2 = 2$

$3x_2 = 4$

$x_2 = \frac{4}{3}$

$x_1 = \frac{10}{3}$



Αντικαθιστώντας στην συνάρτηση z

$\mathrm{K} \rightarrow \quad z = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$

$\mathrm{E} \rightarrow \quad z = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$

$C \rightarrow \quad z = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12$ Άρα το C είναι λύση του προβλήματος με μέγιστα έσοδα 12600

Η βιοτεχνία πρέπει να κατασκευάσει $\frac{10}{3}$ τόνους προϊόντος Ε και $\frac{4}{3}$ τόνους προϊόντος Ε