**ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ**

**ΘΕΜΑ 1**

Δίνεται το ακόλουθο σήμα



(α) Να αποδειχθεί ότι το x(t) είναι περιοδικό και να βρεθεί η περίοδός του.

(β) Να σχεδιαστεί το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του x(t).

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

(α). Το x(t) πρέπει να γραφεί ως άθροισμα περιοδικών όρων:

=>

=>



Ο πρώτος όρος είναι σταθερός.

Για το δεύτερο όρο η περίοδος είναι /300 sec

Για τον τρίτο όρο του αθροίσματος η περίοδος είναι =1/350 sec

Για τον τέταρτο όρο η περίοδος είναι =1/650 sec.

Για τον πέμπτο όρο η περίοδος είναι =1/1000 sec.

Η κοινή περίοδος θα πρέπει να ικανοποιείγια ελάχιστα k,l,m,n. 

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο όλων των περιόδων είναι 1/50 (k=6, l=7, m=13, n=20) συνεπώς το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 1/50 = 0,02 sec. Το σήμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

(β). Το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος  έχει ως εξής:

|  |
| --- |
| 15/2  0  650  f(Hz)  300  3  - 650  -300  3  1000  - 1000  3/4  -350  350 |

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνονται τα εξής σήματα:



όπου .

Να βρεθεί η περίοδος και η συχνότητα του σήματος: 

**Απάντηση**

Είναι



Η περίοδος του 1ου συνημιτονικού όρου είναι:



Η περίοδος του 2ου συνημιτονικού όρου είναι:



Ο λόγος τους είναι:



εφόσον είναι ρητός, το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο:

και συχνότητα: 

**ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ**

**ΘΕΜΑ 1**

Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας για τα παρακάτω σήματα:

(α) 

(β) (όπου με ‘\*’ συμβολίζεται η συνέλιξη)

(γ)  (όπου με ‘\*’ συμβολίζεται η συνέλιξη)

(δ) 

(ε) 

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Α) Το σήμα  ισούται με .

Ο πολλαπλασιασμός στο χρόνο αντιστοιχεί με συνέλιξη στη συχνότητα. Συνεπώς, ο μετασχηματισμός Fourier είναι . Τα πλάτη δεν επηρεάζουν το εύρος ζώνης,. Το εύρος ζώνης τουείναι 100Hz. Η συνέλιξη δύο φασμάτων έχει σαν εύρος ζώνης το άθροισμά τους, δηλαδή 200Hz. Συνεπώς Fnyquist=2\*200=400 Hz.

B) Ως γνωστόν η συνέλιξη δύο σημάτων στο χρόνο μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό των φασμάτων τους. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι  . Το εύρος ζώνης του παλμού είναι 30Hz και του τριγωνικού είναι 60 Hz. Εφόσον πολλαπλασιάζονται στη συχνότητα, το εύρος ζώνης είναι 30Hz. Συνεπώς Fnyquist=60 Hz.

Γ) Ο μετασχηματισμός Fourier του είναι  με εύρος ζώνης είναι 25 Hz,. Ο μετασχηματισμός Fourier του είναι  με εύρος ζώνης άπειρο!

Όμως, ως γνωστόν η συνέλιξη δύο σημάτων στο χρόνο μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό των φασμάτων τους. Συνεπώς,  και αυτό ισοδυναμεί με ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο στα 25 Hz.

Άρα, Fnyquist=2\*25=50 Hz.

Δ) Ισχύει: .

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι , πρόκειται δηλαδή για έναν παλμό στο 0 με εύρος ζώνης 1/4 Hz και για αντίγραφα του παλμού στις συχνότητες 1/2Hz και

-1/2Hz. Συνεπώς το εύρος ζώνης είναι 1/2+1/4= 3/4Hz, συνεπώς Fnyquist=3/2 Hz.

Ε) Γνωρίζουμε ότι γενικά. Συνεπώς =. Όμως το φάσμα της συνάρτησης *δ*(t) είναι ίσο με 1 σε όλες τις συχνότητες, συνεπώς το σήμα δεν έχει πεπερασμένο εύρος φάσματος και δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα δειγματοληψίας.

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το σήμα , όπου *α,b* πραγματικοί και .

**(α)** Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του .

**(β)** Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του  και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων.

**Απάντηση**

**(α)**

Το φάσμα πλάτους είναι



και απεικονίζεται παρακάτω:



**(β)** Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι , οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι  και η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας είναι

Είναι

Συνεπώς, στο πεδίο του χρόνου το δειγματισμένο σήμα θα εκφράζεται ως:

Επίσης, η έκφραση του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων θα ισούται με:



ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1**

|  |
| --- |
| Δίνεται το σήμα . Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους *2V* και συχνότητας  και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα .  1. Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος  και του διαμορφωμένου DSB σήματος .  2. Να υποθέσετε ότι το σήμα  διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας  συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους  και συχνότητας . Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος.  3. Να υποθέσετε ότι το σήμα  υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 10πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 40dB. Να υπολογίσετε το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM, υποθέτοντας ότι η παράμετρος  ισούται με 100. Επίσης, να προσδιορίσετε ποιές τιμές μπορεί να λάβει η συχνότητα δειγματοληψίας ώστε 10 σήματα PCM με τον ανωτέρω σηματοθορυβικό λόγο να μπορούν να μεταδοθούν ταυτόχρονα με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM) σε κανάλι εύρους 100 kHz. |
|  |

**Απάντηση**

1. Δίνεται ότι 

**DSB διαμορφωση**

Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους  και συχνότητας  και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα .

Το φάσμα πλάτους του είναι το εξής:

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα φάσματα πλάτους  και .



2.

Έχουμε ότι 

**FM ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ**

Το σήμα  διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας  συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους  και συχνότητας .

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:



To εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:



όπου 

Το σήμα πληροφορίας έχει εύρος ζώνης ίσο με 

Επίσης,

ισχύει ότι 

Συνεπώς, έχουμε ότι:



οπότε, 

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:



3. **PCM διαμορφωση**

Tο σήμα  υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 10πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 40dB.

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με , συνεπώς η συχνότητα δειγματοληψίας του ερωτήματος είναι .

Προκειμένου το να μεταδοθεί με PCM και SNR≥40dB θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε: .

Συνεπώς ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών ομοιόμορφης κβαντοποίησης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση  άρα κατ’ ελάχιστον απαιτούνται L=100 στάθμες και επειδή θα πρέπει να είναι δύναμη του 2 τελικά θα έχουμε 128 στάθμες κβάντισης.

Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM είναι .

Σχετικά με το 2ο σκέλος του ερωτήματος, για να διέλθουν 10 σήματα PCM από το κανάλι εύρους 100kHz με πολυπλεξία FDM, θα πρέπει το καθένα να έχει εύρος ζώνης ίσο με 10 kHz.

Θέτοντας  και υποθέτοντας τον ίδιο αριθμό σταθμών κβάντισης, υπολογίζουμε την απαιτούμενη μέγιστη συχνότητα δειγματοληψίας ως εξής:



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με .

Συνεπώς, η απαιτούμενη συχνότητα δειγματοληψίας λαμβάνει τις τιμές 

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται το σήμα πληροφορίας . Το σήμα θα μεταδοθεί μέσα από ασύρματο κανάλι και υπάρχουν οι εξής επιλογές:

1. Με διαμόρφωση DSB συνημιτονικού φέροντος με πλάτος και κατάλληλη συχνότητα .
2. Με διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος με πλάτος και κατάλληλη συχνότητα . Η σταθερά απόκλισης συχνότητας είναι .

Ζητούνται τα εξής:

(α) Να δοθούν οι εκφράσεις στο πεδίο του χρόνου για το διαμορφωμένο σήμα που προκύπτει σε καθεμιά από τις περιπτώσεις (i) και (ii).

(β) Να δοθεί η έκφραση στο πεδίο των συχνοτήτων για το διαμορφωμένο σήμα κατά DSB και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του. Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ της συχνότητας του φέροντος και της παραμέτρου  του σήματος πληροφορίας; Ποια είναι η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας του με το κριτήριο Nyquist;

(γ) Να υπολογιστεί το εύρος ζώνης για το διαμορφωμένο σήμα που προκύπτει σε καθεμιά από τις περιπτώσεις (i) και (ii).

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

(α)

Δίνεται ότι:



Το συνημιτονικό φέρον θα είναι της μορφής



Συνεπώς το σήμα DSB γράφεται



και το σήμα FM γράφεται:



(β)

Υπολογισμός φάσματος πλάτους σήματος μηνύματος:

Γνωρίζουμε ότι:

Συνεπώς το φάσμα του σήματος έχει τη μορφή τριγωνικού παλμού πλάτους 1, εύρους  με κέντρο στη συχνότητα .

Το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας είναι α Hz, οπότε η συχνότητα του φέροντος σήματος και στις 2 περιπτώσεις διαμόρφωσης πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερη από α, 

Στην περίπτωση DSB, ο πολλαπλασιασμος του σήματος πληροφορίας με το φέρον θα έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση του φάσματος του κατά τόσο στο θετικό όσο και στον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων, με ταυτόχρονο υποδιπλασιασμό του πλάτους του:



Το φάσμα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας με το κριτήριο Nyquist ισούται με:



άρα η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας θα ισούται με:



(γ)

Το εύρος ζώνης στην περίπτωση της διαμόρφωσης DSB είναι ίσο με 

Στην περίπτωση της διαμόρφωσης FM έχουμε ότι:



όπου





**ΦΙΛΤΡΑ**

|  |
| --- |
| **ΘΕΜΑ 1** |
|  | |
| Έστω ένα σήμα *x*(*t*) με το παρακάτω φάσμα:    Το σήμα *x*(*t*) περνάει από ένα *μη-ιδανικό* ζωνοπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:  και στην έξοδο προκύπτει το σήμα *y*(*t*).  (α) Να εκφράσετε το φάσμα *X*(*f*) αναλυτικά, βάσει ορθογωνικών και τριγωνικών συναρτήσεων.  (β) Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση *h*(*t*) του φίλτρου.  (γ) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το φάσμα *Y*(*f*).  (δ) Να υπολογίσετε το σήμα εξόδου του φίλτρου, *y*(*t*). | |

(α) Η αναλυτική έκφραση του φάσματος αποτελείται από έναν τριγωνικό παλμό Λ(f/1000) και από τετραγωνικούς παλμούς εύρους 2000Hz με κέντρο στα ±2000 Hz, δηλαδή



(β) Πρώτα σχεδιάζω τη συνάρτηση μεταφοράς.

1

2000

1000

3000

-2000

Προκύπτει από μετατόπιση φάσματος κατά 2000 Hz και κλιμάκωση κατά 1000 της Λ(f). Όμως, 

Άρα 

(γ) Στο επόμενο σχήμα φαίνονται τα X(f) και H(f).

1000

1

3000

Hz

0,5

2000

Το γινόμενό τους δίνει το Y(f):

1000

3000

Hz

0,5

2000

Συνεπώς, 

(δ) Γνωρίζουμε ότι 

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι .

|  |
| --- |
| **ΘΕΜΑ 2** |
|  | |
| Δίνεται το σήμα:  (α) Να υπολογιστούν οι συχνότητες που περιέχει το σήμα *x(t)*και νασχεδιαστεί το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του, χωρίς να υπολογιστεί ο ΜΣ Fourier του. Είναι το *x(t)* περιοδικό;  (β) Το σήμα *x(t)* διέρχεται από ιδανικό υψιπερατό φίλτρο μοναδιαίου πλάτους με συχνότητας αποκοπής 10Ηz και προκύπτει το σήμα *y(t)*.Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς *H(f)* και την κρουστική απόκριση *h(t)* του φίλτρου, καθώς και την έκφραση του σήματος *y(t)* στο πεδίο του χρόνου.  (γ) Να υπολογιστεί η συχνότητα του σήματος *y(t).*  (δ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους , όπου ‘\*’ το σήμα της συνέλιξης και *Υ(f)* το φάσμα πλάτους του *y(t)*. | |
|  | |

**ΛΥΣΗ**

(α)

Έχουμε Οι συχνότητες που περιέχονται είναι οι Ηz

Το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους είναι το παρακάτω:

Το σήμα δεν είναι περιοδικό, εφόσον περιέχει το (περιοδικό) σήμα με συχνότητα Ηz το οποίο αθροιζόμενο με οποιοδήποτε από τα άλλα 2 σήματα δίνει μη περιοδικό σήμα διότι ο λόγος των περιόδων τους θα είναι άρρητος αριθμός.

(β)

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου γράφεται:



και η κρουστική απόκριση θα ισούται με 

Το σήμα *y(t)* θα ισούται με 

(γ)

Έχουμε

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος έχει περίοδο  και ο 2ος όρος έχει περίοδο οπότε ο λόγος τους είναι , ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο και η συχνότητα του είναι 100Ηz

(δ)

Το σήμα *y(t)* ισούται με 

Συνεπώς:



Άρα,

=





|  |
| --- |
| **ΘΕΜΑ 3** |
| ***Στόχοι της άσκησης*** *είναι η εξοικείωση με τη σχεδίαση σημάτων, τη χρήση ιδανικών φίλτρων και το ΜΣ Fourier σημάτων αποτελουμένων από στοιχειώδεις παλμούς. Σχετικές ασκήσεις:ΓΕ1/0809/Θ5, ΓΕ1/0708/Θ4,7, Τόμος Β! Μέρος Β! Παράδειγμα 3* | |
| Το σήμα εισόδου x(t) σε ένα Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (LTI) σύστημα έχει το εξής φάσμα πλάτους:    Το σήμα διέρχεται από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ίση με  και προκύπτει το σήμα εξόδου y(t).  (α) Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου , να το εκφράσετε ως άθροισμα κατάλληλων τετραγωνικών και τριγωνικών παλμών και να υπολογίσετε την έκφρασή του στο πεδίο του χρόνου.  (β) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού φίλτρου. Επίσης, να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του φίλτρου.  (γ) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το φάσμα του σήματος εξόδου. Επίσης να υπολογίσετε την έκφρασή του στο πεδίο του χρόνου. | |
| ***Ενδεικτική Μεθοδολογία:*** *Να αναλύσετε τον τύπο που δίνει το φάσμα εισόδου σε όρους του αθροίσματος που περιέχουν σημεία ασυνέχειας. Κάνοντας υπέρθεση των τιμών που παίρνουν αυτοί οι όροι, θα μπορέσετε να προσδιορίσετε τη μορφή του φάσματος εισόδου σε κάθε υποδιάστημα συχνοτήτων, και μπορεί έτσι να γίνει η σχεδίασή του. Στη συνέχεια μπορείτε να εργαστείτε όπως στο θέμα 5 της παρούσας εργασίας.* | |

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

(α)

Οι γραφική αναπαράσταση του σήματος εισόδου στο πεδίο των συχνοτήτων προκύπτει ως εξής:

Σχεδίαση 

Κάθε όρος του αθροίσματος περιέχει ένα σημείο ασυνέχειας.



Κάτω από έναν άξονα με τα σημεία ασυνέχειας καταστρώνουμε τον εξής πίνακα (η τελευταία γραμμή περιλαμβάνει το άθροισμα των προηγουμένων ανά στήλη):

-οο -2 -1 0 1 2 +οο

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|  | 0 | 1 |  |  | 1 | 0 |

Άρα το ζητούμενο σχήμα απεικονίζεται παρακάτω:

Παρατηρούμε ότι φάσμα του σήματος εισόδου γράφεται και ως 

Η έκφραση του σήματος εισόδου στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται ως εξής:



(β)

Το σήμα διέρχεται από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο μοναδιαίου πλάτους με συχνότητα αποκοπής ίση με . Η συνάρτηση μεταφοράς του απεικονίζεται παρακάτω:

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:



και η κρουστική απόκριση του φίλτρου (που αντιστοιχεί στον αντίστροφο ΜΣ Fourier της συνάρτησης μεταφοράς) υπολογίζεται ως εξής:



(γ)

Το φάσμα του σήματος εξόδου προκύπτει από το γινόμενο:



Από τα παραπάνω φάσματα προκύπτει σχηματικά το φάσμα *Y(f):*

Παρατηρούμε ότι φάσμα του σήματος εξόδου γράφεται και ως 

Η έκφραση του σήματος εξόδου στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται ως εξής:

