ΑΣΚΗΣΗ 1

. Η συνάρτηση προσφοράς είναι:

$$0{,}5P + 0{,}5Q^2 - 8Q - 18 = 0 \Rightarrow$$
$$P + Q^2 - 16Q - 36 = 0 \Rightarrow$$
$$(P_s) \rightarrow P_s = -Q^2 + 16Q + 36$$

Επειδή P_s μη αρνητική $\Rightarrow P_d \geq 0 \Rightarrow -Q^2 + 16Q + 36 \geq 0$

$a = -1,\ b = 16,\ c = 36$

$\Delta = 16^2 - 4(-1) - 36 = 256 + 144 = 400$

$$Q_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{-2} = \frac{-16 \pm 20}{-2} \quad \begin{cases} Q_1 = 18 \\ Q_2 = -2 \end{cases}$$

Επειδή P_s ετερόσημο του $a = -1$ η λύση είναι στο διάστημα εντός των ριζών

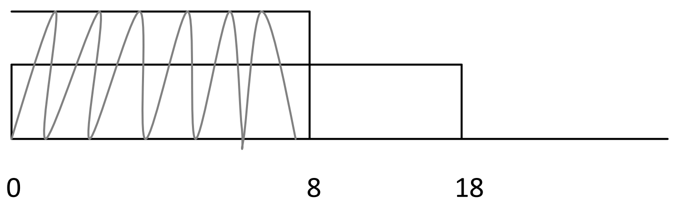
Δηλαδή $0 < Q \leq 18 \quad \underset{\pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha}{(Q > 0)}$

Επειδή P_s γνησίως αύξουσα $\Rightarrow P_s' > 0 \Rightarrow$

$(-Q^2 + 16Q + 36)' > 0 \Rightarrow$

$-2Q + 16 > 0 \Rightarrow Q < 8$

Άρα το πεδίο ορισμού της προσφοράς είναι



$0 < Q < 8$ (1)

Η συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$-3Q^2 - 15Q + 360 - 3P = 0 \Rightarrow$$
$$-Q^2 - 5Q + 120 - P = 0 \Rightarrow$$
$$P_d = -Q^2 - 5Q + 120$$

Επειδή P_d μη αρνητική $\Rightarrow P_d \geq 0 \Rightarrow -Q^2 - 5Q + 120 \geq 0$

Επειδή P_d ετερόσημο του $\alpha = -1$ η λύση είναι στο διάστημα εντός των ριζών

Δηλαδή $0 < Q \leq 8,74$

Επειδή P_d γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow P_d' < 0 \Rightarrow -2Q - 5 < 0$ που ισχύει για κάθε $Q > 0$

Άρα το πεδίο ορισμού της ζήτησης είναι $0 < Q < 8,74 \,(2)$

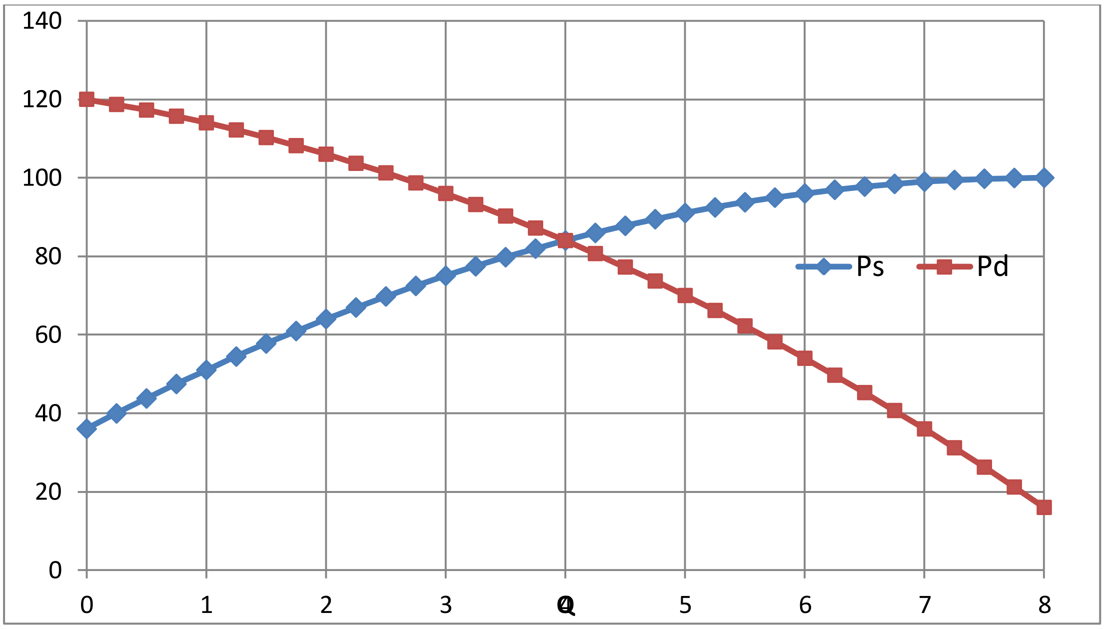
Από (1) και (2) προκύπτει ότι το κοινό πεδίο ορισμού για τη συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης είναι:

$0 < Q < 8$

Σημείο ισορροπίας όταν $P_d = P_s \Rightarrow$

$$-Q^2 - 5Q + 120 = -Q^2 + 16Q + 36 \Rightarrow$$
$$-5Q + 120 = 16Q + 36 \Rightarrow$$
$$-21Q = 36 - 120 \Rightarrow$$
$$-21Q = -84$$
$$Q = \frac{84}{21} = 4 \; \textit{ποσότητα ισορροπίας}$$

με $P = -4^2 - 5 \cdot 4 + 120 = -16 - 20 + 120 = -36 + 120 = 84 \in \textit{τιμή ισορροπίας}$



Η ελαστικότητα προσφοράς ως προς την τιμή δίνεται από τον τύπο

$$\varepsilon_s = Q_s'(P)\cdot\frac{P}{Q}.\ \text{Αλλά}\ Q_s'(P)=\frac{1}{P_s'(Q)}$$

Επομένως $\varepsilon_s = \frac{1}{P_s'(Q)}\cdot\frac{P}{Q} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{1}{-2Q+16}\cdot\frac{P}{Q} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{1}{-2\cdot 4+16}\cdot\frac{84}{4} = \frac{84}{32} = 2{,}62$

Δηλαδή εάν η τιμή του προϊόντος αυξηθεί κατά 1% τότε αναμένεται αύξηση της προσφερόμενης ποσότητας κατά 2,62%

Η ελαστικότητα ζήτησης δίνεται από τον τύπο

$$\varepsilon_d = Q_d'(P)\cdot\frac{P}{Q}\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\ Q_d'(P)=\frac{1}{P_d'(Q)}$$

Επομένως

$$\varepsilon_d = \frac{1}{P_d'(Q)}\cdot\frac{P}{Q} \Rightarrow \varepsilon_d = \frac{1}{-2Q-5}\cdot\frac{P}{Q} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_d = \frac{1}{-2Q-5}\cdot\frac{84}{4} = -\frac{1}{13}\cdot\frac{84}{4} = -\frac{84}{52} = -1{,}61$$

Δηλαδή εάν η τιμή του προϊόντος αυξηθεί κατά 1% αναμένεται μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 1,61%

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$P = 250 - 2{,}5Q$$

Τα συνολικά έσοδα είναι

$$TR = P \cdot Q \Rightarrow TR = (250 - 2{,}5Q) \Rightarrow$$
$$TR = 250Q - 2{,}5Q^2$$

Τα μέσα έσοδα (έσοδο ανά μονάδα προϊόντος) ισούται με την τιμή μονάδας προϊόντος. Άρα $AR = P = 250 - 2{,}5Q$

Τα οριακά έσοδα

$$MR = (TR)' \Rightarrow$$
$$MR = 250 - 5Q$$

$$TR' = (250Q - 2{,}5Q^2)' = 250 - 5Q$$

Πρέπει

$250 - 5Q = 0 \Rightarrow 5Q = 250 \Rightarrow Q = 50$ ακρότατο και $TR''(250 - 5Q)' = -5 < 0$ άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω επομένως για $Q_0 = 50$ τα έσοδα μεγιστοποιούνται,και το μέγιστο έσοδο είναι $TR = 250 \cdot 50 - 2{,}5 \cdot 50^2 = 6250$

$$TC = 3Q^2 - 14Q + 40$$

Η συνάρτηση κέρδους $\Pi = TR - TC$

$$\Pi = 250Q - 2{,}5Q^2 - (3Q^2 - 14Q + 40)$$
$$\Rightarrow \Pi = 250Q - 2{,}5Q^2 - 3Q^2 + 14Q - 40$$
$$\Rightarrow \Pi = -5{,}5Q^2 + 264Q - 40$$

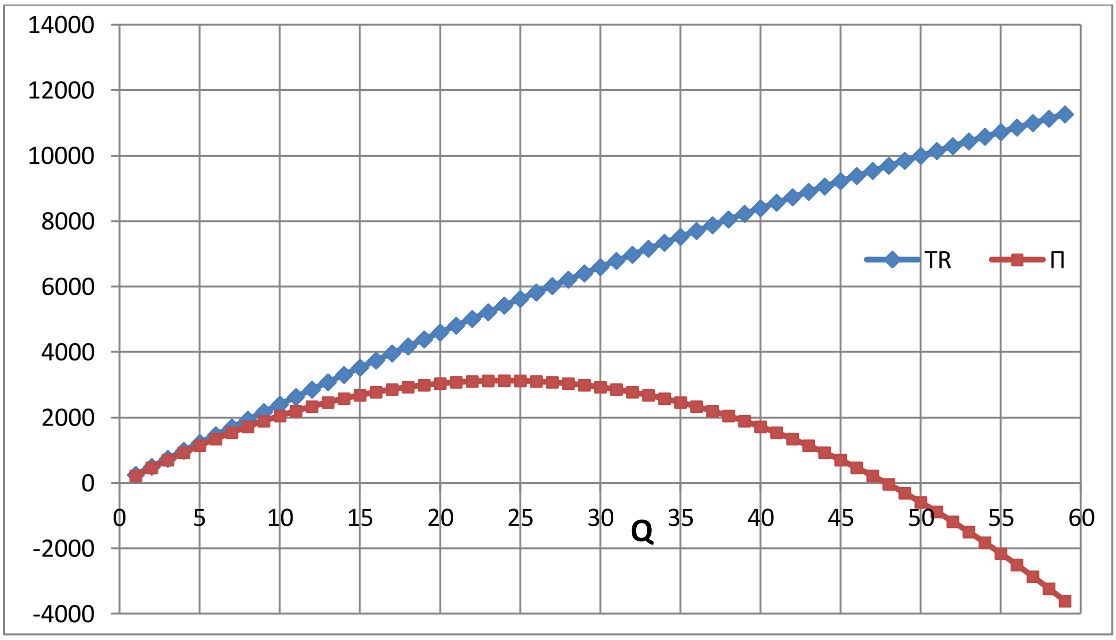
$$\Pi'(Q) = 11Q + 264 = 0 \Rightarrow 11Q = 264 \Rightarrow Q = 24$$

$$\Pi''(Q) = -11 < 0$$

άρα η συνάρτηση του κέρδους στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω επομένως παρουσιάζει μέγιστο για Q=24 .Το μέγιστο κέρδος είναι

$$\Pi(24) = -5{,}5 \cdot 24^2 + 264 \cdot 24 - 40 = 3128$$

ΣΤ)



ΑΣΚΗΣΗ 3

Το κόστος:

$$TC = VC + FC \Rightarrow$$
$$TC = \frac{1}{3}Q^3 - 8Q^2 + 275Q + 700$$

Το μέσο κόστος:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AC = \frac{\left(\frac{1}{3}Q^3 - 8Q^2 + 275Q + 700\right)}{Q}$$

$$AC = \frac{1}{3}Q^2 - 8Q + 275 + \frac{700}{Q}$$

Το μέσο μεταβλητό κόστος

$$AVC = \frac{VC}{Q} \Rightarrow$$
$$AVC = \frac{\frac{1}{3}Q^3 - 8Q^2 + 275Q}{Q} \Rightarrow$$
$$AVC = \frac{1}{3}Q^2 - 8Q + 275$$

Το μέσο σταθερό κόστος

$$AFC = \frac{FC}{Q} \Rightarrow AFC = \frac{700}{Q}$$

Το οριακό κόστος MC

$$MC = TC' \Rightarrow$$
$$MC = Q^2 - 16Q + 275$$

$$MC' = 2Q - 16 = 0 \Rightarrow Q = 8$$

Επίσης $MC'' = 2 > 0$ άρα για $Q = 8$ το οριακό κόστος ελαχιστοποιείται με MC (ελάχιστο)$= 8^2 - 16 \cdot 8 + 275 = 211$

$$AVC' = \frac{2}{3}Q - 8 = 0 \Rightarrow 2Q = 24 \Rightarrow Q = 12$$

Επίσης

$AVC'' = \frac{2}{3} > 0$ άρα για $Q = 12$ το μέσο μεταβλητό κόστος ελαχιστοποιείται με AVC

(ελάχιστο)$= \frac{1}{3} \cdot 12^2 - 8 \cdot 12 + 27 = 227$

$\left(AFC\right)' = -\frac{700}{Q^2} < 0$ άρα το μέσο σταθερό κόστος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και δεν ορίζεται για $u = 0$. Άρα δεν έχει ελάχιστο.

Δ). Όταν το AVC έχει ελάχιστο σημαίνει $\frac{d\left(AVC\right)}{dQ} = 0$ δηλαδή

$$\frac{d\left(\frac{VC}{Q}\right)}{dQ} = 0 \Rightarrow \frac{VC' \cdot Q - VC \cdot Q'}{Q^2} = 0$$
$$\Rightarrow MC \cdot Q - VC \cdot 1 = 0$$
$$MC = \frac{VC}{Q} \Rightarrow MC = VC$$

Ισχύει ότι $TC = VC + FC \Rightarrow MC = \left(VC + FC\right)' \Rightarrow MC = VC' + 0 \Rightarrow MC = VC'$

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

1. $f\left(x\right) = \frac{3}{\left(2x-1\right)^7}$

$$f'\left(x\right) = -\frac{3\left[\left(2x-1\right)^7\right]'}{\left[\left(2x-1\right)^7\right]^2} = -\frac{3 \cdot 7\left(2x-1\right)^6 \cdot \left(2x-1\right)'}{\left(2x-1\right)^{14}} = \frac{-21 \cdot 2}{\left(2x-1\right)^8} = -\frac{42}{\left(2x-1\right)^8}$$

2

$$g\left(x\right) = e^{2x^2}$$
$$g'\left(x\right) = e^{2x^2} \cdot \left(2x^2\right)' \Rightarrow g'\left(x\right) = 4xe^{2x^2}$$

3. $h\left(x\right) = \left(3x^2 - 7\right)\ell n x^2 \Rightarrow$

$$h'\left(x\right) = 6x\ell n x^2 + \left(3x^2 - 7\right)\frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow h'(x) = 6x\ell n x^2 + \frac{\left(3x^2-7\right)\cdot 2}{x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{6x^2\ell n x^2 + 6x^2 - 14}{x}$$

4. $y = \left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{1/3}$

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{-2/3}\cdot\frac{2x\left(x^2-5\right)-\left(x^2+5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^2}$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{-2/3}\frac{2x^3-10x-2x^3-10x}{\left(x^2-5\right)^2}$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{-2/3}\frac{-20x}{\left(x^2-5\right)^2}$$

B) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5)

$$\int\left(8x^3+9x^2-2x+5\right)dx = \frac{8x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}-x^2+5x+c$$
$$= 2x^4+3x^3-x^2+5x+c$$

6)

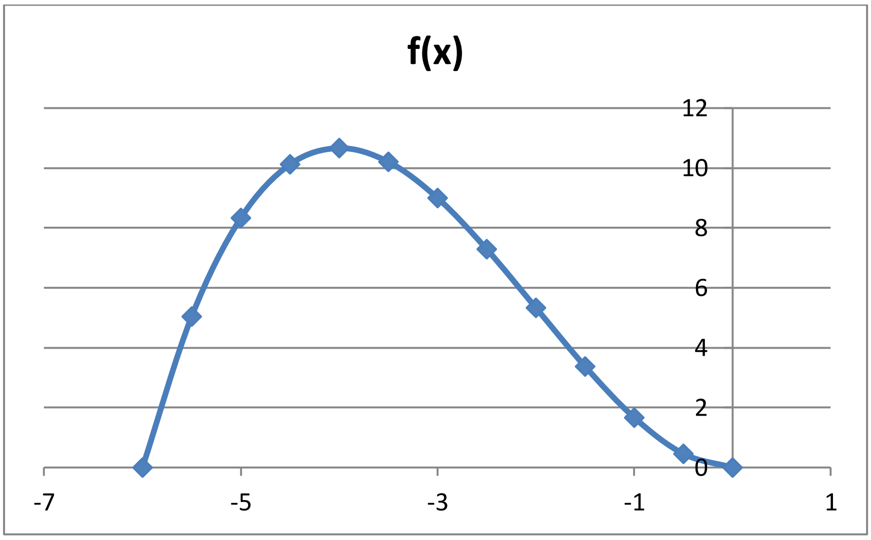
$$\int\left(\frac{6}{x^4}+\frac{2}{x}-5e^x\right)dx = \int\left(6x^{-4}+\frac{2}{x}-5e^x\right)dx = \frac{6x^{-3}}{-3}+2\ell n|x|-5e^x+c = -2x^{-3}+2\ell n|x|-5e^x+c$$

Γ)

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2$$

$$\int_{-5}^{-1}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)dx=\left[\frac{x^4}{12}+2\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{-1}=\left[\frac{(-1)^4}{12}+\frac{2(-1)^3}{3}-\frac{(-5)^4}{12}-\frac{2(-5)^3}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}-\frac{625}{12}+\frac{250}{3}=\frac{92}{3}=30,66$$



Το ολοκλήρωμα εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την γραφική παράσταση της $f(x)$ του άξονα x΄x και τις ευθείες $x=-5,\ και\ x=-1$