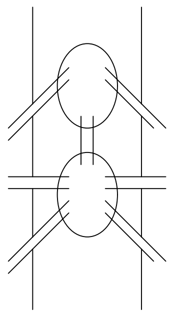
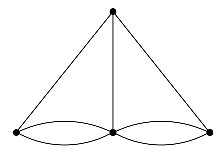
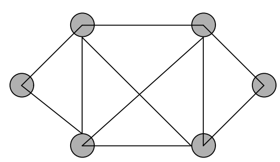
ΜΑΘΗΜΑ 12ο:

ΚΥΚΛΟΙ EULER ΚΑΙ HAMILTON

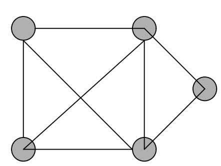




Ορισμός: Κύκλος Euler ονομάζεται ένας κύκλος ο οποίος περνάει μία ακριβώς φορά από κάθε ακμή του γραφήματος.



Ορισμός: Μονοπάτι Euler ονομάζεται ένα μονοπάτι το οποίο περνάει μία ακριβώς φορά από κάθε ακμή του γραφήματος.



Θεώρημα: Ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα περιέχει κύκλο Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.

Απόδειξη: Έστω ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler.

Αν διασχίσουμε τον κύκλο Euler κάθε φορά που φτάνουμε σε μία κορυφή μέσω μιας ακμής, φεύγουμε από την κορυφή μέσω μίας άλλης ακμής. Αρα ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.

Αντίστροφα έστω ότι όλες κορυφές ενός συνεκτικού γραφήματος έχουν άρτιο βαθμό.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος m των ακμών του γραφήματος ότι το γράφημα έχει κύκλο Euler.

Για $m = 3$ το μοναδικό γράφημα που πληρεί τις προυποθέσεις είναι το K_3 (τρίγωνο), το οποίο έχει κύκλο Euler.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $m \leq k$. Θα δείξω ότι ισχύει και για γράφημα με $k + 1$ ακμές.

Σχηματίζουμε ένα μονοπάτι ξεκινώντας από μία οποιαδήποτε αρχική κορυφή και χρησιμοποιώντας κάθε φορά μία ακμή που δεν έχει χρησιμοποιηθεί προηγουμένως στο μονοπάτι.

Όταν φτάνουμε σε μία οποιαδήποτε κορυφή εκτός της αρχικής, το πλήθος ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή και έχουν ηδη χρησιμοποιηθεί είναι περιττό.

Αρα η κατασκευή του μονοπατιού μπορεί να σταματήσει μόνο στην αρχική κορυφή, οπότε έχει σχηματιστεί ένας κύκλος C.

Αν κύκλος είναι κύκλος Euler έχουμε τελειώσει.

Αλλιώς αφαιρούμε τις ακμές του κύκλου από το γράφημα.

Στο γράφημα που προκύπτει κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό.

Από την επαγωγική υπόθεση κάθε μη τετριμένη συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος έχει κύκλο Euler.

Επιπλέον κάθε μη τετριμένη συνεκτική συνιστώσα έχει μία κοινή κορυφή με τον κύκλο C.

Μπορούμε να σχηματίσουμε έναν κύκλο Euler στο αρχικό γράφημα με τον παρκάτω τρόπο:

- διασχίζουμε τον κύκλο C μεχρι να συναντήσουμε μία κορυφή x που ανήκει σε μία συνεκτική συνιστώσα που δεν έχουμε επισκευτεί ακόμη.
- διασχίζουμε το κύκλο Euler της συνεκτικής συνιστώσας.
- συνεχίζουμε την διάσχιση του κύκλου C.

Αρα το γραφημα έχει κύκλο Euler. ∎

Θεώρημα: Ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα περιέχει μονοπάτι Euler αν και μόνο αν καμία ή δύο κορυφές του έχουν περιττό βαθμό.

Θεώρημα: Ένα κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα περιέχει κύκλο Euler αν και μόνο αν για κάθε κορυφή του ο εισερχόμενος βαθμός ισούται με τον εξερχόμενο βαθμό.

Παράδειγμα. Μπορούμε να σχηματίσουμε με τα 28 ντόμινο έναν κύκλο έτσι ώστε τα γειτονικά μισά από τα ντόμινο να έχουν τον ίδιο αριθμό;

Απάντηση. Σχηματίζουμε το πλήρες γράφημα με σύνολο κορυφών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Στο γράφημα αυτό κάθε κορυφή έχει βαθμό 6, άρα περιέχει κύκλο Euler.

Η σειρά με την οποία διασχίζουμε τις ακμές στον κύκλο μας καθορίζει μία αποδεκτή κυκλική τοποθέτηση για τα 21 ντόμινο που περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς.

Στη συνέχεια μπορούμε να παρεμβάλλουμε τα 7 ντόμινο που έχουν 2 φορες τον ίδιο αριθμό σε οποιοδήποτε σημείο του κύκλου εμφανίζεται ο αριθμός αυτός. ∎

Παράδειγμα. Χωρίζουμε έναν κυκλικό δίσκο σε 16 κυκλικούς τομείς. Μπορούμε να αναθέσουμε σε κάθε τομέα ένα bit έτσι ώστε για κάθε πιθανή τετράδα από bits, να υπάρχουν 4 διαδοχικόι τομείς σε ωρολογιακή σειρά που να περιέχουν την τετράδα των bits;

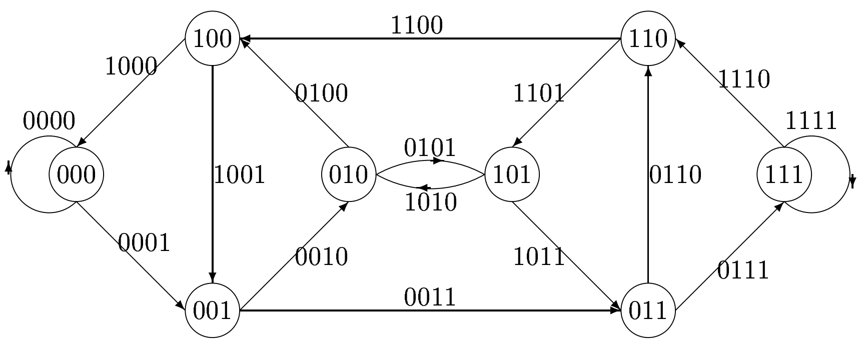
Απάντηση. Κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου

$$V = \{b_1b_2b_3 | b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}\}$$

$$E = \{(b_1b_2b_3, b_2b_3b_4) | b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1\}\}$$

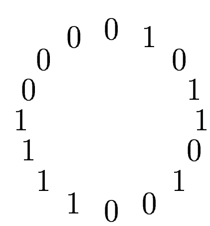
Σημαδεύουμε την ακμή $(b_1b_2b_3, b_2b_3b_4)$ με την τετράδα $(b_1b_2b_3b_4)$.

Παρατηρούμε ότι οι 8 κορυφές είναι σημαδεμένες με τις 8 διαφορετικές 3άδες bit και οι 16 ακμές είναι σημαδεμένες με τις 16 διαφορετικές 4άδες bit.



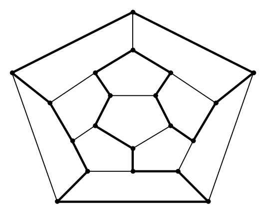
Στο γραφημα κάθε κορυφή έχει εισερχόμενο και εξερχόμενο βαθμό 2. Αρα έχει κύκλο Euler: 0000, 0001, 0010, 0101, 1011, 0110, 1101, 1010, 0100, 1001, 0011, 0111, 1111, 1110, 1100, 1000

Για δύο διαδοχικές ακμές στον κύκλο ισχύει ότι τα τελευταία τρία bit της πρώτης ταυτίζονται με τα τρία πρώτα bit της δεύτερης.



Το τελευταίο bit από κάθε ακμή ορίζουν μία τοποθέτηση των bit στους 16 τομείς του κύκλου. ∎

Ορισμός: Κύκλος Hamilton ονομάζεται ένας κύκλος ο οποίος περνάει ακριβώς μία φορά από κάθε κορυφή του γραφήματος.



Ορισμός: Μονοπάτι Hamilton ονομάζεται ένα μονοπάτι το οποίο περνάει ακριβώς μία φορά από κάθε κορυφή του γραφήματος.

Θεώρημα: Έστω G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών είναι τουλάχιστον $n-1$ τότε το G περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι το γράφημα είναι συνεκτικό.

Έστω ότι το γράφημα δεν ήταν συνεκτικό.

Έστω v_1 μία κορυφή σε μία συνεκτική συνιστώσα με n_1 κορυφές και v_2 μία κορυφή σε μία συνεκτική συνιστώσα με n_2 κορυφές.

Τότε $d(v_1) + d(v_2) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2$ (άτοπο).

Αρα το G είναι συνεκτικό.

Ας υποθέσουμε ότι το G δεν περιέχει μονοπάτι Hamilton. Θεωρούμε ένα μέγιστου μήκους στοιχειώδες μονοπάτι $v_1, v_2, \ldots, v_p$ (όπου $p < n$).

Οι κορυφές v_1 και v_p είναι γειτονικές μόνο με κορυφές του μονοπατιού, γιατί αλλιώς θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε το μονοπάτι το οποίο έχουμε θεωρήσει ότι έχει μέγιστο μήκος.

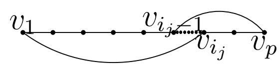
Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχειώδης κύκλος που αποτελείται ακριβώς από τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_p$, ενδεχόμενα σε διαφορετική σειρά.

Έστω ότι η v_1 είναι γειτονική με τις κορυφές $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$, όπου $v_{i_1} = v_2$.

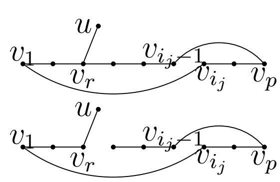
Η v_p θα πρέπει να είναι γειτονική με κάποια από τις $v_{i_1-1} = v_1, v_{i_2-1}, \ldots, v_{i_k-1}$ γιατί σε αντίθετη περίπτωση $d(v_p) \leq p-1-k$ και $d(v_1)+d(v_p) \leq p-1 < n-1$

Αν η v_p είναι γειτονική με την v_1 τότε ο ζητούμενος κύκλος είναι $v_1, v_2, \ldots, v_p, v_1$.

Αν η v_p είναι γειτονική με την v_{i_j}, $j \geq 1$ τότε ο ζητούμενος κύκλος είναι $v_1, v_2, \ldots, v_{i_j-1}, v_p, v_{p-1}, \ldots v_{i_j-1}, v_1$.



Επειδή το γράφημα είναι συνεκτικό υπάρχει μία κορυφή u εκτός του κύκλου που συνδέεται με κάποια κορυφή v_r του κύκλου.



Διαγράφουμε μία από τις δύο ακμές του κύκλου με άκρο την v_r και προσθέτουμε την ακμή $\{u, v_r\}$. Σχηματίζεται έτσι ένα στοιχειώδες μονοπάτι μήκους $p+1$. (άτοπο) ∎

Θεώρημα: Έστω G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές. Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών είναι τουλάχιστον n τότε το G περιέχει κύκλο Hamilton.

Απόδειξη: Παρόμοια με το προηγούμενο θεώρημα.

Παράδειγμα: Θέλουμε να προγραμματίσουμε την εξέταση 7 μαθημάτων σε 7 ημέρες έτσι ώστε κανένας καθηγητής να μην έχει να εξετάσει δύο μαθήματα σε διαδοχικές ημέρες. Αν κάθε καθηγητής διδάσκει το πολύ 4 μαθήματα, τότε υπάρχει πάντα πρόγραμμα που ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις.

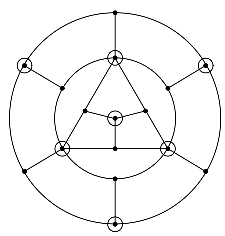
Απόδειξη: Κατασκευάζουμε γράφημα με 7 κορυφές που αντιστοιχούν στα μαθήματα. Δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν τα αντίστοιχα μαθήματα διδάσκονται από διαφορετικό καθηγητή.

Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 3. Αρα το άθροισμα των βαθμών δύο κορυφών είναι τουλάχιστον 6.

Συνεπώς το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton.

Η σειρά των κόρυφών στο μονοπάτι ορίζει μία αποδεκτή σειρά εξέτασης των μαθημάτων. ∎

Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα δεν περιέχει κύκλο Hamilton:



Απόδειξη: Ονομάζω V το σύνολο κορυφών σε κύκλο και U το σύνολο των υπολοίπων κορυφών.

Κάθε ακμή ενώνει μία κορυφή του V με μία κορυφή του U (το γράφημα είναι διμερές).

Αν υπήρχε κύκλος Hamilton θα επρεπε να περνάει εναλλαξ από κορυφές του V και του U. Αυτό δεν γίνεται καθώς $|V| < |U|$. ∎

Ορισμός: Ονομάζουμε πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα το κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει να δόσουμε μία αυθαίρετη κατεύθυνση σε κάθε ακμή ενός πλήρους μη κατευθυνόμενου γραφήματος.

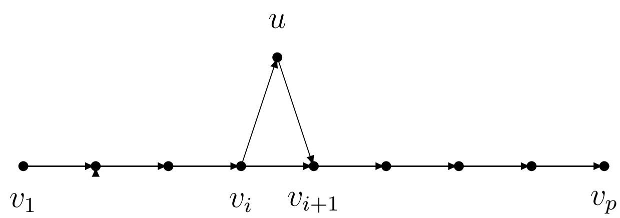
Θεώρημα: Κάθε πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton.

Απόδειξη: Έστω ότι δεν έχει μονοπάτι Hamilton.

Θεωρώ ένα μέγιστου μήκους στοιχειώδες μονοπάτι $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Έστω κορυφή u που δεν ανήκει στο παραπάνω μονοπάτι. Οι ακμές (u, v_1) και (v_p, u) δεν περιέχονται στο γράφημα γιατί τότε θα μπορούσα να επεκτείνω το μονοπάτι.

Αρα οι ακμές (v_1, u) και (u, v_p) περιέχονται στο γράφημα. Θα πρέπει να υπάρχει κάποια κορυφή v_i στο μονοπάτι τέτοια ώστε (v_i, u) και (u, v_{i+1}) να είναι ακμές του γραφήματος.



Τότε το $v_1, v_2, \ldots, v_i, u, v_{i+1}, \ldots, v_p$ είναι στοιχειώδες μονοπάτι μήκους $p+1$ (άτοπο) ∎