ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΔΕΟ13

ΑΣΚΗΣΗ 1

[Μέρος Α]

Η ακόλουθη συνάρτηση συνδέει συνολικό κόστος TC και παραγόμενη ποσότητα Q:

$$TC = 2000 + 10Q + 3Q^2$$

(Α)Γράψτε τις συναρτήσεις του Οριακού Κόστους (Marginal Cost - MC), του Μεταβλητού Κόστους (Variable Cost – VC), του Σταθερού Κόστους (Fixed Cost - FC), του Μέσου Συνολικού Κόστους (Average Total Cost - ATC), του Μέσου Μεταβλητού Κόστους (Average Variable Cost - AVC), και του Μέσου Σταθερού Κόστους (Average Fixed Cost - AFC).

$$MC = (2.000 + 10Q + 3Q^2)' = 10 + 6Q$$

$$VC = 10Q + 3Q^2$$

$$AVC = \frac{10Q + 3Q^2}{Q} = Q\frac{(10 + 3Q)}{Q} = 10 + 3Q$$

$$ATC = \frac{2.000 + 10Q + 3Q^2}{Q}$$

$$FC = 2.000$$

$$AFC = \frac{2.000}{Q}$$

(Β) Βρείτε την ποσότητα Q που ελαχιστοποιεί το ATC και υπολογίστε το ελάχιστο ATC.

Κριτήριο α΄ παραγώγου

$$AC' = \left(\frac{2.000 + 10Q + 3Q^2}{Q}\right)' = \frac{(10 + 6Q)\cdot Q - \left(2.000 + 10Q + 3Q^2\right)}{Q^2} \Rightarrow$$

$$AC' = \frac{10Q + 6Q^2 - 2.000 - 10Q - 3Q^2}{Q^2} \Rightarrow$$

$$AC' = \frac{3Q^2 - 2.000}{Q^2} = 0 \Rightarrow 3Q^2 - 2.000 = 0 \Rightarrow Q^2 = \frac{2.000}{3} \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{\frac{2.000}{3}} = 25,82$$

Κριτήριο β΄ παραγώγου

$$AC'' = \left(\frac{6Q^2 \cdot 2.000}{Q^2}\right)' = \frac{6Q \cdot Q^2 - \left(3Q^2 - 2.000\right) \cdot 2Q}{Q^4} = \frac{6Q^3 - 6Q^3 + 4.000Q}{Q^4} > 0$$

άρα για $Q = 25,82$ το ATC ελαχιστοποιείται.

Το ελάχιστο ATC είναι:

$$ATC(25,82) = \frac{2.000 + 10 \cdot 25,82 + 3 \cdot 25,82^2}{25,82} = \frac{4.258,21}{25,82} = 164,92 \ \textit{περίπου}$$

(Γ) Βρείτε την ποσότητα Q όπου το ATC ισούται με το MC. Υπολογίστε το ATC και το MC σε αυτή την ποσότητα. Τι παρατηρείτε από τις απαντήσεις στα ερωτήματα Β και Γ; Σχολιάστε.

$$ATC = MC \Rightarrow$$
$$\frac{2.000 + 10Q + 3Q^2}{Q} = 10 + 6Q \Leftrightarrow$$
$$2.000 + 10Q + 3Q^2 = 10Q + 6Q^2 \Leftrightarrow$$
$$3Q^2 = 2.000 \Rightarrow$$
$$Q^2 = \frac{2.000}{3} \Rightarrow$$
$$Q = 25,82 \ \textit{όπως και στο β΄ ερώτημα}$$

$$ATC(25,82) = 164,92$$
$$MC(25,82) = 164,92$$

[Μέρος Β]

Η συνάρτηση ζήτησης ενός μονοπωλητή που επιδιώκει μεγιστοποίηση των κερδών του είναι P=100 Q^{-1} +5 Q^{-2}και η συνάρτηση του συνολικού κόστους της επιχείρησής του είναι TC =100 + 2Q − 7lnQ , όπου P είναι η τιμή, και Q η ποσότητα του προϊόντος.

(Α)Να προσδιορισθεί το ύψος παραγωγής στο οποίο το κόστος παραγωγής ελαχιστοποιείται και να υπολογιστεί το ελάχιστο κόστος.

(Α) $TC = 100 + 2Q - 7\ell nQ$

Κριτήριο α΄ παραγώγου

$$TC' = 2 - \frac{7}{Q} = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{7}{2} = 3,5$$

Κριτήριο β΄ παραγώγου

$TC'' = \left(2 - \frac{7}{Q}\right)' = \frac{7}{Q^2} > 0$ άρα για $Q = 3,5$ το TC ελαχιστοποιείται.

Το ελάχιστο κόστος είναι $TC(3,5) = 100 + 2 \cdot 3,5 - 7\ell n \cdot 3,5 = 98,23$

(Β) Να προσδιορισθεί το ύψος παραγωγής στο οποίο ο μονοπωλητής μεγιστοποιεί τα κέρδη του Π και να υπολογιστεί το μέγιστο κέρδος.

Η συνάρτηση κέρδους

$$\Pi = TR - TC = P \cdot Q - TC \Rightarrow$$
$$\Pi = \left(100Q^{-1} + 5Q^{-2}\right)Q - \left(100 + 2Q - 7\ell nQ\right) \Rightarrow$$
$$\Pi = 100 + 5Q^{-1} - 100 - 2Q + 7\ell nQ \Rightarrow$$
$$\Pi = \frac{5}{Q} - 2Q + 7\ell nQ$$

Κριτήριο α΄ παραγώγου

$$\Pi' = \left(\frac{5}{Q} - 2Q + 7\ell nQ\right)' = -\frac{5}{Q^2} - 2 + \frac{7}{Q} = 0 \Leftrightarrow$$
$$-5 - 2Q^2 + 7Q = 0 \Leftrightarrow -2Q^2 + 7Q - 5 = 0$$
$$\Delta = 7^2 - 4(-2)\left(-5\right) = 49 - 40 = 9$$

$$Q_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

$$\frac{-7-3}{-4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$\frac{-7+3}{-4} = 1$$

Κριτήριο β΄ παραγώγου

$$\Pi'' = \left(\frac{-5}{Q^2} - 2 + \frac{7}{Q}\right)' = \left(-5Q^{-2} - 2 + 7Q^{-1}\right)' = 10Q^{-3} - 7Q^{-2} = \frac{10}{Q^3} - \frac{7}{Q^2} = \frac{10 - 7Q}{Q^3}$$

Εάν $Q = 1$ τότε $\Pi''(2) > 0$

Εάν $Q = 2,5$ τότε $\Pi''(2,5) < 0$

Άρα για $Q = 2,5$ το κέρδος Π μεγιστοποιείται και το μέγιστο κέρδος είναι

$$\Pi(2,5) = \frac{5}{2,5} - 2 \cdot 2,5 + 7\ell n 2,5 = 3,41$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

[Μέρος Α]

Η τεχνολογία παραγωγής μιας επιχείρησης χαρακτηρίζεται από συνάρτηση οριακού κόστους MC = 2 − 0,6Q + 0,15Q^2 , όπου Q η ποσότητα προϊόντος. Ταυτόχρονα, οι 4 συνθήκες αγοράς είναι τέτοιες ώστε η επιχείρηση να έχει συνάρτηση οριακού εσόδου MR = 4 − 0,5Q , όπου Q η ποσότητα προϊόντος. Η επιχείρηση γνωρίζει ότι έχει σταθερό κόστος FC = 4 , ενώ δίνεται η πληροφορία ότι το συνολικό έσοδο της επιχείρησης για μηδενικό επίπεδο πωλήσεων (Q = 0) είναι TR = 0 .

(A)Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις συνολικού κόστους TC , συνολικού εσόδου TR , και η συνάρτησης ζήτησης που αντιμετωπίζει η επιχείρηση.

$$MC = 2 - 0,6Q + 0,15Q^2$$
$$MR = 4 - 0,5Q$$
$$FC = 4$$

$$TC = \int MCdQ = \int\left(2 - 0,6Q + 0,15Q^2\right)dQ = 2Q - 0,3Q^2 + 0,05Q^3 + c \Rightarrow$$
$$TC = 2Q - 0,3Q^2 + 0,5Q^3 + 4$$
$$TR = \int MRdQ = \int\left(4 - 0,5Q\right)dQ = 4Q - 0,25Q^2 + c.\ \textit{Αλλά}\ c = 0\ \textit{από την υπόθεση. Άρα}\ TR = -0,25Q^2 +$$

Επομένως

$$P = \frac{TR}{Q} = \frac{-0,25Q^2 + 4Q}{Q} \Rightarrow P = -0,25Q + 4$$

(B) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση κέρδους Π της επιχείρησης, να βρεθεί το επίπεδο Q που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης και το μέγιστο κέρδος.

$$\Pi = TR - TC = -0,25Q^2 + 4Q - \left(2Q - 0,3Q^2 + 0,05Q^3 + 4\right) \Rightarrow$$
$$\Pi = -0,25Q^2 + 4Q - 2Q + 0,3Q^2 - 0,05Q^3 - 4 \Rightarrow$$
$$\Pi = -0,05Q^3 + 0,05Q^2 + 2Q - 4$$

Κριτήριο α΄ παραγώγου

$$\Pi' = MR - MC = 4 - 0,5Q - \left(2 - 0,6Q + 0,15Q^2\right) \Rightarrow$$
$$\Pi' = 4 - 0,5Q - 2 + 0,6Q - 0,15Q^2 = -0,15Q^2 + 0,1Q + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Delta = 0,1^2 - 4\cdot(-0,15)\cdot 2 = 0,01 + 1,2 = 1,21$$

Άρα $Q_{1,2} = \dfrac{-0,1 \pm \sqrt{1,21}}{-0,3} =$

$$\nearrow \quad \frac{-0,1+1,1}{-0,3} < 0 \ \text{απορρίπτεται}$$

$$\searrow \quad \frac{-0,1-1,1}{-0,3} = 4$$

Κριτήριο β΄ παραγώγου

$$\Pi'' = \left(-0,15Q^2 + 0,1Q + 2\right)' = -0,3Q + 0,1$$

Για $Q = 4 \Rightarrow \Pi'' < 0$ άρα για $Q = 4$ το κέρδος μεγιστοποιείται με $\Pi(4) = 1,6$

[Μέρος Β]

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης σε μία αγορά δίνεται από τη συνάρτηση $Q^d = 10 - (p - 3)^2$, ενώ η συνάρτηση προσφοράς είναι γραμμική και δίνεται από τη συνάρτηση: $Q^s = 2p - 1$, όπου Q^d, και Q^s η ζητούμενη και προσφερόμενη ποσότητα αντίστοιχα, και p η τιμή του προϊόντος.

Η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία όταν η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με την προσφερόμενη ποσότητα για δεδομένο επίπεδο τιμών

$$Q^d = Q^s$$

(A) Η συνάρτηση προσφοράς πρέπει να ικανοποιεί την οικονομική συνθήκη να είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού ενώ η συνάρτηση ζήτησης φθίνουσα και $p \geq 0$, $Q^s \geq 0$, $Q^d \geq 0$. Βρείτε αλγεβρικά το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων ώστε να ισχύουν οι προαναφερόμενοι περιορισμοί που θέτει η οικονομική θεωρία .

$$Q^d = 10 - (p-3)^2 = 10 - \left(p^2 - 6p + 9\right) = 10 - p^2 + 6p - 9 = 1 - p^2 + 6p$$

$$Q^s = 2p - 1$$

<u>Για την συνάρτηση ζήτησης</u> πρέπει:

- $Q^d > 0 \Rightarrow 1 - p^2 + 6p > 0 \;\; \mu\varepsilon \;\; \Delta = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 40$

$$P_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{-2} = \quad \frac{-6+6,32}{-2} = -0,16$$

$$\frac{-6-6,32}{-2} = 6,16$$

Το τριώνυμο πρέπει να γίνεται ετερόσημο του $a = -1 < 0$ επομένως $0,16 < p < 6,16 \Rightarrow 0 < p < 6,16$

- $\left(Q^d\right)' < 0 \Leftrightarrow -2p + 6 < 0 \Leftrightarrow p > 3$

Το πεδίο ορισμού της ζήτησης είναι: $3 < p < 6,16$

<u>Για την συνάρτηση προσφοράς</u>

- $Q^5 > 0 \Rightarrow 2p - 1 > 0 \Rightarrow p > \dfrac{1}{2}$

Επομένως το κοινό πεδίο ορισμού είναι: $3 < p < 6,16$

(B) Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας της αγοράς. (Το σημείο ισορροπίας να συμβολιστεί με p* , Q*).

$$Q^d = Q^s \Leftrightarrow$$

$$1 - p^2 + 6p = 2p - 1 \Leftrightarrow$$

$$-p^2 + 4p + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 24$$

$$P_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{-2}$$

$$\frac{-4\pm4,9}{-2}=\frac{0,9}{-2}<0$$

$$\frac{-4-4,9}{-2}=\frac{-8,9}{-2}=4,45$$

Η τιμή p είναι δεκτή γιατί ανήκει στο προηγούμενο πεδίο ορισμού.

Άρα $p^*=4,45$ τιμή ισορροπίας

Με $Q^d=2\cdot4,45-1=8,9-1=7,9$ η ποσότητα ισορροπίας

$Q^s=1-4,45^2+6\cdot4,45=7,9$

Άρα $q^*=7,9$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού: $P=\frac{600}{20+Q}-5$.

(Α)Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις συνολικού εσόδου TR , οριακού εσόδου MR, και μέσου εσόδου AR .

- $TR=P\cdot Q\Rightarrow TR=\left(\frac{600}{20+Q}-5\right)Q\Rightarrow TR=\frac{600Q}{20+Q}-5Q$

- $MR=TR'=\left(\frac{600Q}{20+Q}-5Q\right)'=\frac{600(20+Q)-600Q}{(20+Q)^2}-5$

  $\Rightarrow MR=\frac{12.000+600Q-600Q}{(20+Q)^2}-5$

  $\Rightarrow MR=\frac{12.000}{(20+Q)^2}-5$

- $AR=P=\frac{6.000}{20+Q}-5$

(Β) Να προσδιορισθούν η ποσότητα προϊόντος Q* και η τιμή P* για τις οποίες μεγιστοποιείται το συνολικό έσοδο TR , καθώς και το μέγιστο έσοδο TR*.

Κριτήριο α΄ παραγώγου

$$TR' = \frac{12.000}{\left(20+Q\right)^2} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{12.000}{\left(20+Q\right)^2} = 5 \Rightarrow \left(20+Q\right)^2 = 2.400 \Rightarrow$$
$$20 + Q = \pm\sqrt{2.400} \Leftrightarrow 20 + Q = 48,98 \text{ ή } 20 + Q = -48,98 \Rightarrow$$
$$Q^* = 28,98 \text{ η δεκτή λύση.}$$

$$TR'' = \left(\frac{1.200}{\left(20+Q\right)^2} - 5\right)' = -\frac{1.200 \cdot 2\left(20+Q\right)}{\left(20+Q\right)^4} < 0$$

άρα για $q^* = 28,98$ το TR μεγιστοποιείται.

Άρα $p^* = \dfrac{600}{20 + 28,98} - 5 = 7,24$

$$TR^* = \frac{600 \cdot 28,98}{48,98} - 5 \cdot 28,98 = 355 - 144,90 = 210,10$$

(Γ) Να προσδιορισθεί η ελαστικότητα ζήτησης στις περιπτώσεις που η τιμή είναι ίση με P* , (P* +3), και (P* −3). [Υπόδειξη: να αντιστραφεί η συνάρτηση ζήτησης ώστε η ποσότητα να είναι συνάρτηση της τιμής.]

$$P = \frac{600}{20+Q} - 5 \Rightarrow \left(5+P\right)\left(20+Q\right) = 600$$
$$100 + 5Q + 20P + PQ = 600$$
$$Q = \left(P+5\right) = 500 - 20P$$
$$Q = \frac{500 - 20P}{P+5}$$

$$E_d = \left(\frac{500-20P}{P+5}\right)' \cdot \frac{P}{Q} \Rightarrow$$
$$E_d = \frac{-20\left(P+5\right) - \left(500-20P\right)}{\left(P+5\right)^2} \cdot \frac{P}{Q}$$
$$E_d = \frac{-20P - 100 - 500 - 20P}{\left(P+5\right)^2} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$E_d = \frac{-600}{\left(P+5\right)^2} \cdot \frac{P}{Q}$$

Για $P^* = 7,24$

$$E_d = \frac{-600}{\left(7,24+5\right)^2} \cdot \frac{7,24}{28,98} = -1$$

Για $P^* + 3 = 10,24$ και $Q = \frac{500 - 20 \cdot 10,24}{10,24+5} = 19,37$

$$E_d = \frac{-600}{\left(10,24+5\right)^2} \cdot \frac{10,24}{19,37} = -1,36$$

Για $p^* - 3 = 4,24$ και $Q = \frac{500 - 20 \cdot 4,24}{4,24+5} = 44,93$

$$E_d = \frac{-600}{\left(4,24+5\right)^2} \cdot \frac{4,24}{44,93} = -0,66$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

A) Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $y = (x^2+1)\ln(\mathrm{x}^2+1)$, (ii) $y = e^{2x^2+x}$, (iii) $y = \frac{(3x+2)}{(4x^2+3)}$

i) $y = \left(x^2+1\right)\ell n\left(x^2+1\right) \Rightarrow$

$$y' = 2x\ell n(x^2+1) + \left(x^2+1\right) \cdot \frac{1 \cdot 2x}{2x^2+1} \Rightarrow y' = 2x\ell n\left(x^2+1\right) + 2x$$

ii) $y = e^{2x^2+x}$

$$y' = e^{2x^2+x}\left(2x^2+x\right)' = e^{2x^2+x} \cdot \left(4x+1\right)$$

iii) $y = \frac{3x+2}{4x^2+3} \Rightarrow y' = \frac{3\left(4x^2+3\right) - \left(3x+2\right) \cdot 8x}{\left(4x^2+3\right)^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{12x^2+9-24x^2-16x}{\left(4x^2+3\right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-12x^2-16x+9}{\left(4x^2+3\right)^2}$$

B) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

(i)$y=3x^3 -6x^2$, (ii) $y=e^{-x2/2}$

$y = 3x^3 - 6x^2$

$y' = 9x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(3x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \dfrac{4}{3}$

$y'' = 18x - 12$

- Εάν $x = 0 \Rightarrow y''(0) < 0$ άρα για $x = 0$ η y παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $y = 3\cdot 0^3 - 6\cdot 0^2 = 0$
- Εάν $x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow y''\left(\dfrac{4}{3}\right) = 18\dfrac{4}{3} - 12 > 0$ άρα για $x = \dfrac{4}{3}$ η y παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $y = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 - 6\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow y = 3\cdot\dfrac{64}{27} - \dfrac{96}{9} = \dfrac{64}{9} - \dfrac{96}{9} = -\dfrac{32}{9}$

ii) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

$y'' = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(-1 + x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$

Ισχύει $y''(0) < 0$ άρα για $x = 0$ η y παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $y = e^0 = 1$