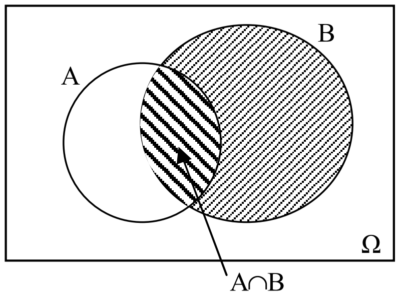
ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ Ή ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω ότι επιθυμούμε να μελετήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και έστω $P(A)$ η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ενώ δεν γνωρίζουμε το ακριβές αποτέλεσμα του πειράματος, εντούτοις είναι δυνατό να έχουμε κάποια πληροφορία σχετικά με αυτό. Συγκεκριμένα, έστω ότι γνωρίζουμε ότι έχει (ή ότι θα) πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο B. Ποια θα είναι σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα *να συμβεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι συνέβη* (*ή ότι θα συμβεί*) *το B*; Ας συμβολίσουμε την πιθανότητα αυτή με $P(A|B)$.

Επειδή τώρα γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το B, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο νέος δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο B.



Επομένως, ζητώντας την πιθανότητα του A δεδομένου του B είναι σαν να ζητάμε την πιθανότητα του $A\cap B$ στο νέο δειγματικό χώρο B. Θα πρέπει λοιπόν

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)},$$

όπου διαιρούμε με την πιθανότητα $P(B)$ ώστε να ισχύει ότι $P(B|B) = 1$ (η πιθανότητα να συμβεί το B δεδομένου ότι συνέβη το B θα πρέπει προφανώς να είναι 1). Επομένως, φυσιολογικά οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.7. *Έστω δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω και* $P(B) > 0$. *Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει* (*ή ότι θα*) *πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B ορίζεται*

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}.$$

Η $P(A|B)$ καλείται και δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B.

Άσκηση 1.22. Μία οικογένεια έχει δύο παιδιά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα δύο αγόρια δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα από αυτά είναι αγόρι; (υποθέστε ότι η πιθανότητα γέννησης α ή κ είναι ½ και ½ αντίστοιχα).

Λύση. Τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος εδώ είναι

$$\Omega=\{(α,α),(α,κ),(κ,α),(κ,κ)\}$$

όπου π.χ. το στοιχειώδες ενδεχόμενο {(α,κ)} αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα: πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι κ.ο.κ. Επειδή η πιθανότητα γέννησης α ή κ είναι ½ και ½ αντίστοιχα, τα 4 στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα. Έστω

A={*και τα δύο παιδιά είναι αγόρια*}={(α,α)}

και

B={*τουλάχιστον ένα από τα παιδιά είναι αγόρι*}={(α,α),(α,κ),{κ,α)}

Ζητείται η

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{(a,a)\})}{P(\{(a,a),(a,k),(k,a)\})}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

Άσκηση 1.23. Ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα της ρίψης δύο ζαριών να έχει άθροισμα ίσο με 7 α) χωρίς να έχουμε καμία πληροφορία για το αποτέλεσμα β) δεδομένου ότι και τα δύο ζάρια είχαν ένδειξη μεγαλύτερη του 2, και γ) δεδομένου ότι τα δύο ζάρια είχαν διαφορετική ένδειξη;

Λύση. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι γνωστό ότι περιλαμβάνει όλες τις διατάξεις των έξι στοιχείων {1,2,...,6} ανά δύο με επανάληψη, δηλαδή Ω={(1,1),(1,2),...,(6,6)} και $|\Omega|=6^2=36$.

α) Έστω

Α = {*άθροισμα δύο ζαριών ίσο με* 7}={(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

Θα ισχύει ότι

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

β) Έστω

Β = {*και τα δύο ζάρια έχουν ένδειξη μεγαλύτερη του* 2}={(3,3), (3,4), ... , (6,6)}

Το ενδεχόμενο Β περιλαμβάνει όλες τις διατάξεις των 4 στοιχείων {3,4,5,6} ανά δύο με επανάληψη. Επομένως $|B|=4^2=16$ και

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{(3,4),(4,3)\})}{P(B)}=\frac{2/36}{16/36}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

γ) Έστω

Γ = {*τα δύο ζάρια έχουν διαφορετική ένδειξη*}

Το ενδεχόμενο Γ περιλαμβάνει όλες τις διατάξεις των 6 στοιχείων {1,2,3,4,5,6} ανά δύο (χωρίς επανάληψη). Επομένως $|\Gamma|=(6)_2=30$ και

$$P(A|\Gamma)=\frac{P(A\cap \Gamma)}{P(\Gamma)}=\frac{P(A)}{P(\Gamma)}=\frac{6/36}{30/36}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}.$$

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι για συγκεκριμένο (σταθερό) B η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot|B)$ η οποία απεικονίζει κάθε ενδεχόμενο A του Ω στο $P(A|B)$ ικανοποιεί τα αξιώματα Kolmogorov και άρα είναι πιθανότητα. Πράγματι, $P(A|B)\in[0,\infty)$ για κάθε ενδεχόμενο A,

$$P(\Omega|B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

και αν $A_1,A_2,\ldots$ είναι μία ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\frac{P((\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B))}{P(B)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\cap B)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$$

αφού $A_1\cap B$, $A_2\cap B$, … είναι και αυτή μία ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω. Συνεπώς ισχύουν και για τη δεσμευμένη πιθανότητα όλα τα θεωρήματα και οι ιδιότητες που ισχύουν για πιθανότητες. Για παράδειγμα αν A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω (με $P(C)>0$) τότε (βλ. Πρόταση 1.2.))

1) $P(A^C|C) = 1 - P(A|C)$
2) $0 \le P(A \mid C) \le 1$
3) $P(\varnothing \mid C) = 0$
4) $P(A-B|C)=P(A|C) - P(AB|C)$
5) $P(A \bigcup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \bigcap B \mid C)$
6) $P(A \bigcup B \mid C) \le P(A \mid C) + P(B \mid C)$ (ανισότητα Boole για δεσμευμένες πιθανότητες)
7) $P(A \bigcap B \mid C) \ge P(A \mid C) + P(B \mid C) - 1$ (ανισότητα Bonferroni για δεσμευμένες πιθανότητες)
8) Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B|C) \le P(A|C)$ (μονοτονία της δεσμευμένης πιθανότητας)

κ.ο.κ. ...

Παρατήρηση. Αξίζει να υπογραμμιστεί ότι η συνάρτηση $P(\,\cdot\,|B)$ (για σταθερό Β) έχει της ιδιότητες μιας πιθανότητας αλλά δεν ισχύει το ίδιο και για τη συνάρτηση $P(A \mid \cdot)$ (για σταθερό Α). Δηλαδή γενικά δεν ισχύουν εκφράσεις της μορφής $P(A \mid B \cup \Gamma) = P(A \mid B) + P(A \mid \Gamma) - P(A \mid B \cap \Gamma)$ κ.ο.κ.

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του Ω με $P(B)>0$. Παρατηρούμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις είναι δυνατό η πιθανότητα πραγματοποίησης του A δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί το B να είναι ίση με την πιθανότητα του A (χωρίς καμία δέσμευση). Δηλαδή,

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα πραγματοποίησης του A δεν επηρεάζεται καθόλου από την πραγματοποίηση του B. Δηλαδή τα ενδεχόμενα A,B είναι κατά κάποιο τρόπο «ανεξάρτητα». Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στην εισαγωγή του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 1.8. *Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω θα καλούνται* (*στοχαστικά*) *ανεξάρτητα αν ισχύει ότι*

$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Όπως είδαμε και παραπάνω, αν δύο ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα και $P(B)>0$ τότε

$$\frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \mid B) = P(A)$$

ενώ επίσης αν $P(A)>0$ τότε,

$$\frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(B \mid A) = P(B).$$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε και πάλι το πείραμα της ρίψης δύο ζαριών. Είναι διαισθητικά προφανές ότι οποιαδήποτε πληροφορία γνωρίζουμε για το αποτέλεσμα της ρίψης του πρώτου ζαριού, δεν προσφέρει κάποια επιπλέον πληροφορία για το αποτέλεσμα της ρίψης του δεύτερου ζαριού. Π.χ. αν A={*αποτέλεσμα ρίψης πρώτου ζαριού* 6}, B={*αποτέλεσμα ρίψης δεύτερου ζαριού* > 3} τότε διαισθητικά θα πρέπει $P(A|B) = P(A)$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί στη συγκεκριμένη περίπτωση εύκολα να επαληθευτεί και μέσω του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας και της Πρότασης 1.1. Επίσης, δύο πειράματα θα θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν για κάθε δύο ενδεχόμενα A, B έτσι ώστε το A «αφορά» το πρώτο πείραμα και το B «αφορά» το δεύτερο πείραμα, να ισχύει ότι $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ (δηλ. τα A, B είναι ανεξάρτητα).

Η στοχαστική ανεξαρτησία μπορεί εύκολα να γενικευτεί και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Συγκεκριμένα, τα ενδεχόμενα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ θα καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητα αν

$$P(A_{a_1}\cap A_{a_2}\cap\ldots\cap A_{a_k}) = P(A_{a_1})P(A_{a_2})\ldots P(A_{a_k}),$$

για κάθε k (διαφορετικούς ανά δύο) δείκτες $a_1,a_2,\ldots,a_k\in\{1,2,\ldots,n\}$ και για κάθε $k = 2, 3, \ldots, n$. Π.χ. για να είναι τέσσερα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3, A_4 ανεξάρτητα θα πρέπει η παραπάνω ισότητα να ισχύει για κάθε δύο (διαφορετικά) A_i, δηλαδή,

$$P(A_1\cap A_2) = P(A_1)P(A_2),\ P(A_1\cap A_3) = P(A_1)P(A_3),\ P(A_1\cap A_4) = P(A_1)P(A_4),$$

$$P(A_2\cap A_3) = P(A_2)P(A_3),\ P(A_2\cap A_4) = P(A_2)P(A_4),\ P(A_3\cap A_4) = P(A_3)P(A_4),$$

και για κάθε τρία (διαφορετικά) A_i, δηλαδή,

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3),\quad P(A_1\cap A_2\cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4),$$

$$P(A_1\cap A_3\cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4),\quad P(A_2\cap A_3\cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4),$$

και για κάθε τέσσερα (διαφορετικά) A_i, δηλαδή,

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).$$

Υπογραμμίζεται ότι για να είναι n ενδεχόμενα στοχαστικά ανεξάρτητα, δεν αρκεί να είναι ανά δύο ανεξάρτητα. Η έννοια των δύο ανεξάρτητων (στοχαστικών) πειραμάτων γενικεύεται και αυτή για περισσότερα από δύο πειράματα: n πειράματα θα θεωρούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητα αν και μόνο αν για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ (ώστε το A_i ενδεχόμενο να «αφορά» το i-πείραμα, i=1,2,...,n) τα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ είναι μεταξύ τους στοχαστικά ανεξάρτητα.

Αρκετές φορές προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, προσπαθούμε να εκφράσουμε το ενδεχόμενο αυτό ως μια τομή ενδεχομένων που αφορούν στοχαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα. Ως συνέπεια, η αρχική πιθανότητα θα είναι ίση με την πιθανότητα μιας τομής ανεξάρτητων ενδεχομένων η οποία ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων των επί μέρους ενδεχομένων (οι οποίες ενδεχομένως να είναι γνωστές). Η τεχνική αυτή γίνεται περισσότερο φανερή στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Άσκηση 1.24. Έστω ότι εκτελούμε ένα (σύνθετο) πείραμα το οποίο αποτελείται από τρεις ανεξάρτητες δοκιμές (απλά πειράματα). Η πιθανότητα επιτυχίας στην i-δοκιμή είναι ίση με p_i, $i = 1, 2, 3$. α) Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων του. Είναι τα ενδεχόμενα αυτά ισοπίθανα; γ) ποια είναι η πιθανότητα να παρατηρηθούν τουλάχιστον 2 επιτυχίες στις 3 αυτές δοκιμές;

Λύση. α) Προφανώς, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο

$$\Omega = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\},$$

(έχουμε θέσει 1: επιτυχία, 0:αποτυχία) δηλαδή αποτελείται από όλες τις διατάξεις των δύο στοιχείων $\{0,1\}$ ανά 3 (τρεις δοκιμές) με επανάληψη.

β) Αρχικά ας υπολογίσουμε την πιθανότητα του στοιχειώδους ενδεχομένου $\{(0,0,1)\}$. Σύμφωνα με μία παραπάνω παρατήρηση, θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το ενδεχόμενο αυτό ως μια τομή ενδεχομένων που αφορούν στοχαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα. Αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα A_i = {*επιτυχία στην i-δοκιμή*}, $i = 1, 2, 3$ τότε $\{(0,0,1)\} = A_1^C\cap A_2^C\cap A_3$ και τα A_1^C, A_2^C, A_3 αφορούν στοχαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα (διότι έχουμε 3 ανεξάρτητες δοκιμές). Άρα θα ισχύει ότι

$$P(\{(0,0,1)\}) = P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3) = P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3) = (1-p_1)(1-p_2)p_3.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν οι πιθανότητες όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων του πειράματος. Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι συνοπτικά θα ισχύει ότι

$$P(\{(x_1,x_2,x_3)\}) = p_1^{x_1}(1-p_1)^{1-x_1}\, p_2^{x_2}(1-p_2)^{1-x_2}\, p_3^{x_3}(1-p_3)^{1-x_3}\,,\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}.$$

Προφανώς, τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα μόνο όταν $p_1 = p_2 = p_3 = ½$.

γ) Έστω

$$A = \{\textit{τουλάχιστον 2 επιτυχίες στις 3 δοκιμές}\} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\},$$

Θα ισχύει ότι

$$P(A) = P(\{(1,1,0)\}) + P(\{(1,0,1)\}) + P(\{(0,1,1)\}) + P(\{(1,1,1)\})$$
$$= p_1 p_2 (1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3\,.$$

Αν π.χ. $p_1 = p_2 = p_3 = ½$ τότε $P(A) = 1/8+1/8+1/8+1/8 = 4/8$ γεγονός που θα μπορούσε να είχε βρεθεί και μέσω της Πρότασης 1.1. που αφορά ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα (φυσικά, στη γενικότερη περίπτωση που $p_i \neq ½$, δεν είναι δυνατή η χρήση της Πρότασης 1.1).

Άσκηση 1.25. Μία οικογένεια έχει δύο παιδιά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα δύο αγόρια δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα από αυτά είναι αγόρι; (υποθέστε ότι η πιθανότητα γέννησης α ή κ είναι 0.49 και 0.51 αντίστοιχα).

Λύση. Τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος εδώ είναι

Ω={(α,α),(α,κ),(κ,α),(κ,κ)}

όπου π.χ. το στοιχειώδες ενδεχόμενο {(α,κ)} αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα: πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι κ.ο.κ. Σε αντίθεση με την άσκηση 1.23 τα στοιχειώδη ενδεχόμενα εδώ δεν είναι ισοπίθανα. Έστω

Α={*και τα δύο παιδιά είναι αγόρια*}={(α,α)}

και

Β={*τουλάχιστον ένα από τα παιδιά είναι αγόρι*}={(α,α),(α,κ),{κ,α)}

Ζητείται η

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(a,a)\})}{P(\{(a,a),(a,k),(k,a)\})}\,.$$

Επειδή το δεύτερο παιδί είναι α ή κ ανεξάρτητα από το πρώτο και αντίστροφα, θα έχουμε ότι

$$P(A\cap B) = P(A) = P(\textit{το πρώτο παιδί αγόρι και το δεύτερο παιδί αγόρι})$$
$$= P(\textit{το πρώτο παιδί αγόρι})P(\textit{το δεύτερο παιδί αγόρι}) = 0.49^2$$

και

$$P(B) = 1-P(B^C) = 1-P(\textit{το πρώτο παιδί κορίτσι και το δεύτερο παιδί κορίτσι})$$
$$= 1-P(\textit{το πρώτο παιδί κορίτσι})P(\textit{το δεύτερο παιδί κορίτσι}) = 1-0.51^2$$

Άρα τελικά,

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.49^2}{1-0.51^2} = 32.45\%\,.$$

Άσκηση 1.26. Η πιθανότητα να πετύχει ένας σκοπευτής ένα στόχο είναι p=1/3. α) Ποια είναι η πιθανότητα να πυροβολήσει 5 φορές μέχρις ότου χτυπήσει το στόχο μία φορά. β) Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν περισσότεροι από 10 πυροβολισμοί για να πετύχει το στόχο μία φορά;

Λύση. Για το ερώτημα (α) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι $\Omega = \{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_5), \alpha_i\in \{0,1\}\}$, $|\Omega| = 2^5$ και

$$A_5 = \{5 \textit{ πυροβολισμοί μέχρις ότου χτυπηθεί ο στόχος}\} = \{(0,0,0,0,1)\}.$$

Επειδή οι 5 πυροβολισμοί είναι ανεξάρτητοι ως στοχαστικά πειράματα, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(A_5) &= P(\textit{άστοχος ο } 1^{\text{ος}} \textit{ πυροβ. και άστοχος ο } 2^{\text{ος}} \textit{ πυροβ. και ... και στο στόχο ο } 5^{\text{ος}} \textit{ πυροβ.}) \\ &= P(\textit{άστοχος ο } 1^{\text{ος}} \textit{ πυροβ})P(\textit{άστοχος ο } 2^{\text{ος}} \textit{ πυροβ.}) \ldots P(\textit{στο στόχο ο } 5^{\text{ος}} \textit{ πυροβ.}) \\ &= (1-p)^4\, p = 13.16\%. \end{aligned}$$

Η Πρόταση 1.1. θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί μόνο στην περίπτωση που p = ½.

β) Εδώ, μας βολεύει να θεωρήσουμε ότι $\Omega = \{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{10}), \alpha_i\in \{0,1\}\}$. Θέτουμε $B = \{$*περισσότεροι από* 10 *πυροβολισμοί μέχρις ότου χτυπηθεί ο στόχος*$\}$. Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\textit{άστοχος ο } 1^{\text{ος}} \textit{ πυροβ. και άστοχος ο } 2^{\text{ος}} \textit{ πυροβ. και ... και άστοχος ο } 10^{\text{ος}} \textit{ πυροβ.}) \\ &= P(\textit{άστοχος ο } 1^{\text{ος}} \textit{ πυροβ})P(\textit{άστοχος ο } 2^{\text{ος}} \textit{ πυροβ.}) \ldots P(\textit{άστοχος ο } 10^{\text{ος}} \textit{ πυροβ.}) \\ &= (1-p)^{10} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, όμοια με το (α) μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$P(A_i) = P(\textit{ i πυροβολισμοί μέχρις ότου χτυπηθεί ο στόχος}) = (1-p)^{i-1}p,$$

και επομένως,

$$P(B) = P(\textstyle\bigcup_{i=10}^{\infty} A_i) = \displaystyle\sum_{i=11}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=11}^{\infty}(1-p)^{i-1}p = p(1-p)^{10}\sum_{i=11}^{\infty}(1-p)^{i-11} = p(1-p)^{10}\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i}$$

$$= p(1-p)^{10}\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{10}.$$

Παραπάνω είδαμε ότι για δύο ενδεχόμενα A, B γενικά ισχύει ότι

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ και άρα } P(A\cap B) = P(A\,|\,B)P(B).$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να γενικευτεί για την πιθανότητα της τομής περισσότερων ενδεχομένων. Ειδικότερα ισχύει ή επόμενη πρόταση

Πρόταση 1.7. (*Πολλαπλασιαστικός κανόνας για την πιθανότητα τομής ενδεχομένων*). *Αν* A_1, A_2, ..., A_k *είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε*

$$P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_k) = P(A_k\,|\,A_1\cap ...\cap A_{k-1})P(A_{k-1}\,|\,A_1\cap ...\cap A_{k-2})...P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)P(A_2\,|\,A_1)P(A_1)$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_k) = P(A_k\,|\,A_1\cap ...\cap A_{k-1})P(A_1\cap ...\cap A_{k-1})$$

ενώ

$$P(A_1\cap ...\cap A_{k-1}) = P(A_{k-1}\,|\,A_1\cap ...\cap A_{k-2})P(A_1\cap ...\cap A_{k-2})$$

κ.ο.κ. ... για την $P(A_1\cap ...\cap A_{k-2})$ και η απόδειξη συμπληρώνεται με επαγωγή.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, η πιθανότητα να συμβούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A_1, A_2, ..., A_k είναι ίση με την πιθανότητα να συμβεί το A_1 επί την πιθανότητα να συμβεί το A_2 δεδομένου ότι συνέβη το A_1 επί την πιθανότητα να συμβεί το A_3 δεδομένου ότι συνέβη το A_1 και A_2 κ.ο.κ. ... επί την πιθανότητα να συμβεί το A_k δεδομένου ότι συνέβησαν τα $A_1,...,A_{k-1}$.

Άσκηση 1.27. Τραβάμε τρία χαρτιά (χωρίς επανάθεση) από μια τράπουλα με 52 χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 άσσους.

Λύση. (***α τρόπος***) Έστω $B=\{1,2,...,52\}$ τα 52 χαρτιά της τράπουλας και έστω ότι οι άσσοι είναι τα τέσσερα πρώτα 1,2,3,4. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις τριάδες $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ διαφορετικών στοιχείων του B δηλαδή από όλους τους συνδυασμούς των 52 ανά 3. Το ενδεχόμενο A = {*τρεις άσσοι*} αποτελείται από όλες τις τριάδες $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ διαφορετικών στοιχείων του {1, 2, 3, 4} δηλαδή από όλους τους συνδυασμούς των 4 στοιχείων ανά 3. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου μπορούν να θεωρηθούν ισοπίθανα και συνεπώς από την Πρόταση 1.1. θα ισχύει ότι

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{4!\,3!\,(52-3)!}{3!\,(4-3)!\,52!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{52\cdot 51\cdot 50}=\frac{1}{5525}.$$

(το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν θεωρήσουμε τις παραπάνω τριάδες $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ διατεταγμένες, χρησιμοποιώντας διατάξεις αντί συνδυασμούς).

(***β τρόπος***) Θα χρησιμοποιήσουμε τον πολλαπλασιαστικό κανόνα. Έστω ότι εκλέγουμε ένα-ένα τα τρία χαρτιά (χωρίς επανάθεση) και έστω A_i = {*i χαρτί άσσος*}, i = 1,2,3. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A_1\cap A_2\cap A_3$. Θα ισχύει ότι

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)=\frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50}=\frac{1}{5525}.$$

Παρατήρηση. Η πιθανότητα $P(A_1\cap A_2\cap A_3)$ που εμφανίζεται στον β΄ τρόπο λύσης της Άσκησης 1.27 αποτελεί ένα παράδειγμα πιθανότητας μιας τομής εξαρτημένων ενδεχομένων. Πράγματι, στην συγκεκριμένη περίπτωση τα A_1, A_2, A_3 δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχονται από ανεξάρτητα πειράματα διότι π.χ. το αποτέλεσμα του πρώτου πειράματος (1^{η} επιλογή χαρτιού) επηρεάζει το δεύτερο πείραμα (2^{η} επιλογή χαρτιού) αφού η επιλογή αυτή γίνεται *χωρίς* επανάθεση (το χαρτί που τραβήξαμε μένει εκτός της τράπουλας και συνεπώς η επόμενη επιλογή χαρτιού γίνεται από τράπουλα με διαφορετική σύνθεση). Είναι προφανές ότι τα A_1,A_2,A_3 θα ήταν ανεξάρτητα μόνο αν η επιλογή γίνονταν *με* επανάθεση.

Άσκηση 1.28. Ένας παίκτης Lotto ισχυρίζεται ότι όταν ένας αριθμός από τους 49 δεν έχει εμφανιστεί στις 30 τελευταίες κληρώσεις τότε αυξάνεται η πιθανότητα να εμφανιστεί στην επόμενη κλήρωση. Συμφωνείτε;

Λύση. Έστω A το ενδεχόμενο να μην εμφανιστεί ο αριθμός στις 30 τελευταίες κληρώσεις και B το ενδεχόμενο να εμφανιστεί στην επόμενη κλήρωση. Ο παίκτης ισχυρίζεται ότι

$$P(B|A) > P(B)$$

Είναι όμως προφανές ότι τα ενδεχόμενα A και B αφορούν στοχαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα. Το αποτέλεσμα της επόμενης κλήρωσης δεν επηρεάζεται από τα αποτελέσματα των τελευταίων 30 κληρώσεων (αυτό φυσικά ισχύει όταν η κλήρωση δεν είναι «στημένη»). Επομένως $P(B|A) = P(B)$ και ο ισχυρισμός του παίκτη δεν είναι σωστός.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Σε ορισμένες περιπτώσεις ένα (σύνθετο) στοχαστικό πείραμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο βήματα (πειράματα). Τα δύο αυτά πειράματα είναι έτσι ώστε, οι πιθανότητες των ενδεχομένων που αφορούν το δεύτερο πείραμα να εξαρτώνται από το αποτέλεσμα του πρώτου πειράματος. Είναι ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση να δούμε πως μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου που αφορά το δεύτερο πείραμα (ή συνολικά και τα δύο πειράματα). Για παράδειγμα, έστω ότι αρχικά ρίχνουμε ένα νόμισμα. Αν έρθει κεφαλή τότε επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από ένα κουτί που περιέχει 5 μαύρες και 3 λευκές σφαίρες. Αν έρθει γράμματα τότε επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από ένα άλλο κουτί που περιέχει 6 μαύρες και 2 λευκές σφαίρες. Ποια θα είναι η πιθανότητα εκλογής μαύρης σφαίρας αν δούμε αυτά τα δύο βήματα σαν ένα πείραμα; Αρχικά θέτουμε K το ενδεχόμενο να φέρουμε κεφαλή και Γ το ενδεχόμενο να φέρουμε γράμματα στη ρίψη του νομίσματος. Αν M είναι το ενδεχόμενο επιλογής μαύρης σφαίρας τότε θα ισχύει ότι

$$P(M) = P((M \cap K) \cup (M \cap \Gamma)) = P(M \cap K) + (M \cap \Gamma)$$
$$= P(M \mid K)P(K) + P(M \mid \Gamma)P(\Gamma)$$

Αλλά, $P(M \mid K) = 5/8$ και $P(M \mid \Gamma) = 6/8$ ενώ $P(K) = P(\Gamma) = 1/2$. Συνεπώς,

$$P(M) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}.$$

Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που τα αποτελέσματα του πρώτου βήματος είναι περισσότερα από δύο. Ακόμη γενικότερο είναι το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό και ως θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Θεώρημα 1.1. (*Θεώρημα ολικής πιθανότητας*). *Έστω $A_1,A_2,...,A_n$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$. Αν B είναι ένα ενδεχόμενο του Ω τότε*

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + ... + P(B \mid A_n)P(A_n).$$

Απόδειξη. Επειδή τα $A_1,A_2,...,A_n$ είναι ξένα ανά δύο έπεται ότι το ίδιο θα ισχύει και για τα ενδεχόμενα $B \cap A_1$, $B \cap A_2$,..., $B \cap A_n$. Επομένως, από τα αξιώματα Kolmogorov θα ισχύει ότι

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup ... \cup A_n)) = P((B \cap A_1) \cup ... \cup (B \cap A_n))$$
$$= P(B \cap A_1) + ... + P(B \cap A_n) = P(B \mid A_1)P(A_1) + ... + P(B \mid A_n)P(A_n).$$

Άσκηση 1.29. Οι φοιτητές μιας σχολής κρίνονται ικανοί ή μη ικανοί να περάσουν ένα μάθημα βάσει γραπτών εξετάσεων. Η πιθανότητα να κριθεί ικανός ένας πολύ καλός (ΠΚΛ), καλός (ΚΛ), μέτριος (Μ), κακός (ΚΚ) και πολύ κακός (ΠΚΚ) φοιτητής είναι 95%, 75%, 50%, 25%, 5% αντίστοιχα. Αν το ποσοστό των ΠΚΛ, ΚΛ, Μ, ΚΚ, ΠΚΚ ανάμεσα στους φοιτητές της σχολής είναι 3%, 17%, 40%, 30%, 10% αντίστοιχα, να βρεθεί η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής (-τρια) να περάσει το μάθημα. Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να είναι πολύ καλός δεδομένου ότι πέρασε το μάθημα;

Λύση. Για να βρούμε την πιθανότητα να περάσει το μάθημα ένας φοιτητής θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε σε ποια από τις πέντε κατηγορίες ανήκει. Έστω ΠΚΛ, ΚΛ, Μ, ΚΚ, ΠΚΚ τα ενδεχόμενα να ανήκει στους πολύ καλούς, καλούς, μέτριους, κακούς και πολύ κακούς φοιτητές αντίστοιχα. Αν I είναι το ενδεχόμενο να κριθεί ο φοιτητής ικανός, από το Θεώρημα ολικής πιθανότητας (τα ενδεχ. ΠΚΛ, ...,ΠΚΚ είναι ξένα και η ένωσή τους δίνει τον Ω) θα ισχύει ότι

$$P(I) = P(I \mid \text{ΠΚΛ})P(\text{ΠΚΛ}) + P(I \mid \text{ΚΛ})P(\text{ΚΛ}) + P(I \mid \text{Μ})P(\text{Μ}) +$$

$$+P(I\mid \text{KK})P(\text{KK})+P(I\mid \Pi\text{KK})P(\Pi\text{KK})$$

$$=0.95\cdot 0.03+0.75\cdot 0.17+0.50\cdot 0.40+0.25\cdot 0.30+0.05\cdot 0.10$$

$$=0.436=43.6\%$$

Στη συνέχεια αναζητούμε την πιθανότητα $P(\Pi\text{K}\Lambda|I)$. Θα ισχύει (χρησιμοποιώντας και τον πολλαπλασιαστικό κανόνα) ότι

$$P(\Pi\text{K}\Lambda\mid I)=\frac{P(\Pi\text{K}\Lambda\cap I)}{P(I)}=\frac{P(I\mid \Pi\text{K}\Lambda)P(\Pi\text{K}\Lambda)}{P(I)}=\frac{0.95\cdot 0.03}{0.436}\approx 0.065=6.5\%$$

Είναι ενδιαφέρουσα η παρατήρηση ότι στην παραπάνω άσκηση ζητήθηκε ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $P(\Pi\text{K}\Lambda|I)$ ενώ ήταν γνωστές οι πιθανότητες $P(\Pi\text{K}\Lambda)$,..., $P(\Pi\text{KK})$ και οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(I|\Pi\text{K}\Lambda)$,..., $P(I|\Pi\text{KK})$. Οι $P(\Pi\text{K}\Lambda)$,..., $P(\Pi\text{KK})$ εκφράζουν την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι ΠΚΛ, ..., ΠΚΚ αντίστοιχα, ***πριν*** μάθουμε αν έχει κριθεί ικανός στις εξετάσεις. Ενώ οι πιθανότητες $P(\Pi\text{K}\Lambda|I)$, ..., $P(\Pi\text{K}\Lambda|I)$ εκφράζουν την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να είναι ΠΚΛ, ..., ΠΚΚ αντίστοιχα, ***αφότου*** μάθουμε ότι έχει κριθεί ικανός στις εξετάσεις. Το συγκεκριμένο πρόβλημα όπως θα δούμε στη συνέχεια εμφανίζεται αρκετά συχνά. Για το λόγο αυτό ας το εξετάσουμε στη γενικότερη περίπτωση.

Έστω $A_1,A_2,...,A_n$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα με $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ και έστω ότι γνωρίζουμε τις πιθανότητες $P(A_i)$, $P(B|A_i)$, $i=1,2,...,n$ για κάποιο ενδεχόμενο $B\subseteq\Omega$. Με ποιο τρόπο θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A_i|B)$; Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, οι πιθανότητες $P(A_i)$, $i=1,2,...,n$ συνήθως καλούνται και «εκ των προτέρων» (ή «a priori») πιθανότητες ενώ οι $P(A_i|B)$, $i=1,2,...,n$ καλούνται και «εκ των υστέρων» (ή «a posteriori») πιθανότητες. Συνοπτικά θα έχουμε:

Γνωστές:	$P(A_1)$, $P(A_2)$, …, $P(A_n)$	«*εκ των προτέρων*» πιθανότητες των A_i
	$P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$, …, $P(B|A_n)$	δεσμευμένες πιθανότητες του B
Άγνωστες:	$P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, …, $P(A_n|B)$	«*εκ των υστέρων*» πιθανότητες των A_i

Το πρόβλημα λύνεται εύκολα ακολουθώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και κατά την λύση της προηγούμενης άσκησης. Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα το οποίο είναι γνωστό και ως τύπος ή Θεώρημα του Bayes.

Θεώρημα 1.2 (*Θεώρημα ή τύπος του Bayes*). *Έστω $A_1,A_2,...,A_n$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n=\Omega$. Αν B είναι ένα ενδεχόμενο του Ω τότε*

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+...+P(B\mid A_n)P(A_n)},\ i=1,2,...,k.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας θα έχουμε ότι

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας προκύπτει τελικά το ζητούμενο.

Άσκηση 1.30. Όταν κάποιος παίρνει λεωφορείο για τη δουλειά του πηγαίνει καθυστερημένος στο 30% των περιπτώσεων και όταν παίρνει ταξί πηγαίνει καθυστερημένος στο 10% των περιπτώσεων. Προτιμά λεωφορείο στο 80% και ταξί στο 20% των περιπτώσεων.
(α) Ποια η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μια ημέρα;
(β) Αν μία ημέρα πήγε καθυστερημένος στη δουλειά του, ποια η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο;

Λύση. Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα Κ: καθυστερημένος, Λ: παίρνει λεωφορείο, Τ: παίρνει ταξί. Η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μια ημέρα είναι (Θ.Ο.Π.)

$$P(K) = P(K \mid \Lambda)P(\Lambda) + P(K \mid T)P(T) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.26$$

Η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο δεδομένου ότι πήγε καθυστερημένος είναι

$$P(\Lambda \mid K) = \frac{P(K \mid \Lambda)P(\Lambda)}{P(K)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.26} = 0.92\,.$$

Άσκηση 1.31. Έστω ότι η πιθανότητα ορθής διάγνωσης καρκίνου της μήτρας με το τεστ Pap είναι 99%. Ποια είναι η πιθανότητα γυναίκα με θετικό τεστ πράγματι να έχει την ασθένεια, αν είναι γνωστό ότι το ποσοστό των γυναικών που έχουν καρκίνο της μήτρας είναι 0.01%; Πόσες φορές πρέπει να βγει θετικό το συγκεκριμένο τεστ ώστε η πιθανότητα να έχει την ασθένεια να είναι τουλάχιστον 99%;

Λύση. Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και πραγματοποιούμε το συγκεκριμένο τεστ. Συμβολίζουμε με Θ το ενδεχόμενο να βρεθεί θετικό το τεστ, με Y το ενδεχόμενο να είναι υγιής και A το ενδεχόμενο να είναι ασθενής με καρκίνο της μήτρας η συγκεκριμένη γυναίκα. Ζητείται η πιθανότητα $P(A|\Theta)$. Από τον τύπο του Bayes θα έχουμε ότι

$$P(A \mid \Theta) = \frac{P(\Theta \mid A)P(A)}{P(\Theta \mid Y)P(Y) + P(\Theta \mid A)P(A)} = \frac{0.99 \cdot 0.0001}{0.01 \cdot (1 - 0.0001) + 0.99 \cdot 0.0001} = 0.00980392 \approx 1\%\,.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι, δεδομένης της πληροφορίας του θετικού τεστ η πιθανότητα να είναι ασθενής η γυναίκα αυξήθηκε από το 0.01% (αδέσμευτη πιθανότητα, $P(A)$) στο 1% περίπου. Παρόλη την αύξηση αυτή, δεν μπορούμε προφανώς να πούμε με βεβαιότητα ότι η γυναίκα είναι πράγματι ασθενής και θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε ξανά το τεστ.

Έστω τώρα ότι το τεστ πραγματοποιείται k φορές και έστω Θ_i το ενδεχόμενο να βρεθεί το τεστ θετικό την i-φορά, i=1,2,...,k. Θα υπολογίζουμε την πιθανότητα $P(A \mid \Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k)$ να έχει η γυναίκα την ασθένεια δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό και τις k φορές. Θα έχουμε και πάλι από τον τύπο του Bayes ότι

$$P(A \mid \Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k) = \frac{P(\Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k \mid A)P(A)}{P(\Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k \mid Y)P(Y) + P(\Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k \mid A)P(A)}\,.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τα k τεστ στοχαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους (δεδομένου του A), τότε

$$P(\Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k \mid A) = P(\Theta_1 \mid A) \cdot ... \cdot P(\Theta_k \mid A) = 0.99^k\,.$$

Όμοια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$P(\Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k \mid Y) = P(\Theta_1 \mid Y) \cdot ... \cdot P(\Theta_k \mid Y) = 0.01^k\,,$$

και άρα τελικά

$$P(A \mid \Theta_1 \cap ... \cap \Theta_k) = \frac{0.99^k \cdot 0.0001}{0.01^k \cdot (1 - 0.0001) + 0.99^k \cdot 0.0001}\,.$$

Για k = 2, 3, 4 βρίσκουμε αντίστοιχα την παραπάνω πιθανότητα ίση με 0.495, 0.9898, 0.999896. Επομένως για να είναι έχει μία γυναίκα καρκίνο με πιθ. 99% θα πρέπει να έχει βρεθεί θετικό τεστ 3 συνεχόμενες φορές.

Άσκηση 1.32. Η τιμή ενός προϊόντος αυξομειώνεται στο χρόνο. Το τελευταίο διάστημα έχει με κάποιο τρόπο εκτιμηθεί ότι όταν η τιμή αλλάζει, αυτή είτε μειώνεται με πιθανότητα 15% είτε αυξάνεται με πιθανότητα 85%. Ένας αναλυτής προβλέπει ότι η επόμενη κίνηση της τιμής θα είναι καθοδική ενώ ένας ανεξάρτητος δεύτερος ότι θα είναι ανοδική. Ποιον αναλυτή να εμπιστευτούμε αν ο πρώτος κάνει σωστή πρόβλεψη στο 90% και ο δεύτερος στο 70% των περιπτώσεων;

Λύση. Έστω A το ενδεχόμενο να αυξηθεί η τιμή και M το ενδεχόμενο να μειωθεί. Ας συμβολίσουμε με A_i, M_i τα ενδεχόμενα να προβλέψει ο i-αναλυτής αύξηση, μείωση αντίστοιχα της τιμής. Η πιθανότητα να αυξηθεί η τιμή δεδομένου ότι ο πρώτος αναλυτής προέβλεψε μείωση και ο δεύτερος αύξηση είναι

$$P(A \mid M_1A_2) = \frac{P(M_1A_2 \mid A)P(A)}{P(M_1A_2 \mid A)P(A) + P(M_1A_2 \mid M)P(M)}$$

Οι δύο αναλυτές είναι ανεξάρτητοι, άρα

$$P(M_1A_2 \mid A) = P(M_1 \mid A)P(A_2 \mid A) = 0.1 \cdot 0.7$$

και

$$P(M_1A_2 \mid M) = P(M_1 \mid M)P(A_2 \mid M) = 0.9 \cdot 0.3$$

Επομένως τελικά,

$$P(A \mid M_1A_2) = \frac{0.1 \cdot 0.7 \cdot 0.85}{0.1 \cdot 0.7 \cdot 0.85 + 0.9 \cdot 0.3 \cdot 0.15} = \frac{0.0595}{0.0595 + 0.0405} = 0.595 = 59.5\% .$$

Άρα δεδομένων των στοιχείων που έχουμε (οι εισηγήσεις των δύο αναλυτών) είναι πιθανότερο να έχουμε αύξηση (59.5%) αντί μείωση (1−0.595=0.405=40.5%) της τιμής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση λοιπόν, ίσως θα πρέπει να εμπιστευτούμε το δεύτερο αναλυτή αν και δεν είναι τόσο αξιόπιστος όσο ο πρώτος.