

Πρόγραμμα Σπουδών: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ και ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

Θεματική Ενότητα: ΔΕΟ-13 – Ποσοτικές Μέθοδοι

Ακαδημαϊκό Έτος: 2017-2018

**Δεύτερη Γραπτή Εργασία**

**Επιχειρησιακά Μαθηματικά**

**Γενικές οδηγίες για την εργασία**

Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις της εργασίας πρέπει να δίνονται σε δύο αρχεία σύμφωνα με τις αναλυτικές οδηγίες που ακολουθούν. Τα δύο αρχεία θα πρέπει να ανέβουν στο <http://study.eap.gr>

**Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:**

**Τρίτη 16 Ιανουαρίου 2018**

Εργασίες που παραλαμβάνονται εκπρόθεσμα (μετά την **Τρίτη 16 Ιανουαρίου 2018**) επισύρουν βαθμολογικές κυρώσεις (0,5 βαθμό για κάθε ημερολογιακή ημέρα καθυστέρησης). Εργασίες που υποβάλλονται με καθυστέρηση μεγαλύτερη από 7 ημέρες δεν γίνονται δεκτές.

### **Αναλυτικές Οδηγίες**

Η εργασία περιλαμβάνει 4 υποχρεωτικές ασκήσεις η λύση των οποίων απαιτεί τη δημιουργία των παρακάτω αρχείων:

1. Αρχείο Word με τις απαντήσεις στις Ασκήσεις 1 - 4 (Όνομα αρχείου: Eponymo.Onoma-GE2.doc ή Eponymo.Onoma-GE2.docx ανάλογα με την έκδοση office ). Στο αρχείο αυτό θα πρέπει να δίνονται οι αναλυτικές απαντήσεις των ασκήσεων με τη σειρά που δίνονται στην εκφώνηση, αναγράφοντας και τον

αριθμό του αντίστοιχου υποερωτήματος. Επίσης, όλοι οι πίνακες και τα διαγράμματα που περιέχονται στο αρχείο Excel θα πρέπει να μεταφερθούν και σε αυτό το αρχείο και συγκεκριμένα στα σημεία που δίνονται οι απαντήσεις των αντιστοίχων ασκήσεων.

2. Αρχείο Excel με τις απαντήσεις στις Ασκήσεις όπου σας ζητείται να χρησιμοποιήσετε Excel (Όνομα αρχείου: Eponymo.Onoma-GE2.xls ή Eponymo.Onoma-GE2.xlsx ανάλογα με την έκδοση office). Το αρχείο Excel πρέπει να περιέχει φύλλα εργασίας όσα και τα υποερωτήματα όπου σας ζητείται η χρήση Excel. Τα φύλλα εργασίας πρέπει να έχουν το όνομα του αντίστοιχου υποερωτήματος. π.χ. «Άσκηση 3-Π», «Άσκηση 4» κλπ.

Επισημαίνεται ότι οι εργασίες πρέπει να είναι επιμελημένες και ότι **η αντιγραφή** μέρους ή ολόκληρης της εργασίας **απαγορεύεται αυστηρά**. Ο Συντονιστής και η Επιτροπή Γραπτών Εργασιών της ΔΕΟ 13 διεξάγουν σε όλη τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους δειγματοληπτικούς ελέγχους σε όλα τα τμήματα για τον εντοπισμό και την τιμωρία τέτοιων φαινομένων.

Στο αρχείο Excel όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν **αποκλειστικά με τη χρήση τύπων και συναρτήσεων του Excel**. Τα διαγράμματα θα πρέπει να μεταφέρονται και στο αρχείο word.

Για τη δημιουργία των μαθηματικών σχέσεων, για όσους έχουν έκδοση παλαιότερη του word 2007 να γίνει χρήση της εφαρμογής «**Επεξεργασία Εξισώσεων**» (**Equation Editor**) του Word (Από τη γραμμή μενού: Insert → Object → από Object type επιλέξτε Microsoft Equation 3.0 ή στα Ελληνικά: Εισαγωγή → Αντικείμενο → από Τύπος Αντικειμένου επιλέξτε Microsoft Equation 3.0). Για όσους έχουν word 2007 και έπειτα, δεν ισχύει το παραπάνω. Ο Equation editor εμφανίζεται στο μενού insert, δεξιά με το σύμβολο του π. Και δεν χρειάζεται να περάσουν εξισώσεις στην παλιά έκδοση (3.0).

Εάν η εφαρμογή «Επεξεργασία Εξισώσεων» (Equation Editor) δεν υπάρχει ήδη εγκατεστημένη στον υπολογιστή σας τότε δεν «εμφανίζεται». Στη περίπτωση αυτή θα πρέπει να την εγκαταστήσετε χρησιμοποιώντας το CD εγκατάστασης του Microsoft Office. Περισσότερα στοιχεία για τον Equation Editor υπάρχουν στο εγχειρίδιο H/Y (σελ. 68-71), το οποίο είναι διαθέσιμο στη ιστοσελίδα της ΔΕΟ13 (<http://class.eap.gr/deo13>) ακολουθώντας διαδοχικά τους συνδέσμους: *Εκπαίδευση...Συμπληρωματικό Διδακτικό Υλικό στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές* και επιλέγοντας το αρχείο με όνομα Egxeiridio H-Y.pdf.

## ΑΣΚΗΣΗ 1 (25 μονάδες)

Οι παρακάτω μαθηματικές σχέσεις αντιπροσωπεύουν τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός αγαθού:

$$q - p = 2, \quad q + p^2 = 8$$

όπου οι μη αρνητικές ποσότητες  $p, q$ , δηλώνουν αντιστοίχως την ζητούμενη/προσφερόμενη τιμή και ποσότητα του αγαθού.

1. Ποια από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι η συνάρτηση ζήτησης και ποια η συνάρτηση προσφοράς; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (3 μονάδες)
2. Θεωρώντας τις δύο συναρτήσεις ως συναρτήσεις του  $p$ , να βρείτε το κοινό πεδίο ορισμού τους (3 μονάδες)
3. Ποιο είναι, αν υπάρχει, το σημείο ισορροπίας της αγοράς; (3 μονάδες)
4. Υπολογίστε τις ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στο σημείο ισορροπίας. Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα. (3 μονάδες)
5. Χρησιμοποιώντας το excel, να σχεδιάσετε τις δύο συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων με τις ποσότητες στον κάθετο άξονα και τις τιμές στον οριζόντιο. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις για τιμές του  $p$  από το 0,1 έως και το 2,8 με βήμα 0,1 (3 μονάδες)
- 6.

Έστω  $D(p)$  η συνάρτηση ζήτησης και  $S(p)$  η συνάρτηση προσφοράς. Καθώς η τιμή μειώνεται από την τιμή  $\beta$  στην τιμή  $\alpha$  ο καταναλωτής έχει όφελος που ονομάζεται πλεόνασμα του καταναλωτή (συμβολίζεται CS) και υπολογίζεται με το ολοκλήρωμα:

$$CS = \int_{\alpha}^{\beta} D(p) dp$$

Ομοίως, καθώς η τιμή αυξάνεται από την τιμή  $\gamma$  στην τιμή  $\delta$  ο παραγωγός έχει όφελος που ονομάζεται πλεόνασμα του παραγωγού (συμβολίζεται PS) και υπολογίζεται με το ολοκλήρωμα:

$$PS = \int_{\gamma}^{\delta} S(p) dp$$

Για τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς της άσκησης, να υπολογίσετε το πλεόνασμα του καταναλωτή που οφείλεται στη μείωση της τιμής από  $\sqrt{8}$  σε 2 και το πλεόνασμα του παραγωγού καθώς η τιμή αυξάνεται από 0 σε 2. Με αναφορά στο σχήμα του 5<sup>ου</sup> ερωτήματος να δώσετε τη γεωμετρική τους ερμηνεία. **(10 μονάδες)**

### **ΑΣΚΗΣΗ 2 (25 μονάδες)**

Οι συναρτήσεις ολικών εσόδων και ολικού κόστους (σε χιλιάδες ευρώ) μιας επιχείρησης είναι αντίστοιχα

$$TR(q) = 5q, \quad TC(q) = 0,5q^3 - 3q^2 + 7,5q + 2,5 \quad (q \geq 0)$$

όπου  $q$  η παραγόμενη ποσότητα (σε τόνους).

*(Στις πράξεις που θα κάνετε, να στρογγυλοποιείτε τα αποτελέσματα σε 2 δεκαδικά ψηφία).*

1. Να βρείτε το επίπεδο παραγωγής όπου το κέρδος  $\Pi(q)$  μεγιστοποιείται καθώς επίσης και το μέγιστο κέρδος. Να συγκρίνετε τις τιμές των οριακών εσόδων (MR) και του οριακού κόστους (MC) στο επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιείται το κέρδος. Τι παρατηρείτε; **(7 μονάδες)**
2. Να αποδείξετε γενικότερα ότι, αν η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται στο επίπεδο  $q^*$ , τότε ισχύει  $MR(q^*) = MC(q^*)$  **(3 μονάδες)**
3. Να υπολογίσετε το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο μεταβλητό κόστος παραγωγής  $AVC(q)$ . **(5 μονάδες)**
4. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $[1,2]$  υπάρχει νεκρό σημείο της παραγωγής. (Νεκρό σημείο ονομάζεται ένα επίπεδο παραγωγής στο οποίο το κέρδος μηδενίζεται) **(5 μονάδες)**
5. Με χρήση του Excel, να γίνουν τα γραφήματα των συναρτήσεων κέρδους  $\Pi(q)$  και μέσου μεταβλητού κόστους παραγωγής  $AVC(q)$  στο ίδιο σύστημα αξόνων για  $q$  από 0 έως 10 μονάδες προϊόντος με βήμα 1. Να σχολιάσετε τα γραφήματα σχετικά με τα προηγούμενα ερωτήματα. **(5 μονάδες)**

**Παρατήρηση:** Η απόδειξη, όπου ζητείται, να γίνει με χρήση γενικών συναρτήσεων και όχι μόνο για τις συναρτήσεις της άσκησης.

### ΑΣΚΗΣΗ 3 (25 μονάδες)

Η συνάρτηση οριακών εσόδων MR της επιχείρησης δίνεται από τη σχέση:

$$MR = -1,5q^2 + 160q - 300, (q \geq 0)$$

όπου  $q$  η ποσότητα προϊόντος (σε τόνους) που παράγει η επιχείρηση.

1. Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις ολικών εσόδων (TR) και μέσων εσόδων (AR) της επιχείρησης. Δίνεται ότι για μηδενική ποσότητα παραγωγής τα συνολικά έσοδα είναι μηδέν. **(3 μονάδες)**
2. Να υπολογιστεί η ποσότητα  $q$  για την οποία η συνάρτηση μέσων εσόδων εμφανίζει ακρότατο και να προσδιοριστεί το είδος του ακρότατου. **(5 μονάδες)**
3. Να επαληθεύσετε ότι στο επίπεδο όπου η συνάρτηση AR μεγιστοποιείται ισχύει  $MR = AR$  και να αποδείξετε ότι αυτό ισχύει γενικά. **(7 μονάδες)**
4. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας κατασκευάζοντας πίνακα στο Excel στον οποίο θα υπολογίζετε τα μεγέθη AR και MR για τιμές του  $q$  από 0 μέχρι 160 με βήμα 10. Στη συνέχεια απεικονίστε τον πίνακα σε κατάλληλο γράφημα. **(5 μονάδες)**
5. Να αποδείξετε ότι η ελαστικότητα των συνολικών εσόδων στο σημείο όπου η AR εμφανίζει ακρότατο είναι ίση με μονάδα. **(5 μονάδες)**

*Παρατήρηση:* Η απόδειξη, όπου ζητείται, να γίνει με χρήση γενικών συναρτήσεων και όχι μόνο για τις συναρτήσεις της άσκησης.

### ΑΣΚΗΣΗ 4 (25 μονάδες)

A. Υπολογίστε την παράγωγο για κάθε μία από τις επόμενες συναρτήσεις:

(α)  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x + 2}$     (β)  $g(x) = 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$     (γ)  $h(x) = xe^{-x}$     (δ)  $k(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

**(12 μονάδες)**

B.

Η παρούσα αξία (PV) ενός μελλοντικού ποσού  $A(t)$  που θα το εισπράξουμε τη χρονική στιγμή  $t$  είναι το ποσό που αν κατατεθεί σήμερα με ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο  $r$ , θα έχει αξία  $A(t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Με συνεχή ανατοκισμό η παρούσα αξία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$PV(t) = A(t)e^{-rt}$$

(α) Δίνεται ότι η τιμή πώλησης  $p(t)$  ενός αγαθού αυξάνει με σταθερό ρυθμό  $p'(t) = 20$  και ότι η σημερινή του τιμή είναι 500 ευρώ. Να βρεθεί η τιμή πώλησης  $p(t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ . (4 μονάδες)

(β) Να βρεθεί, με συνεχή ανατοκισμό και ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο 2%, η κατάλληλη χρονική στιγμή πώλησης του αγαθού. (Υπόδειξη: Σε περιπτώσεις όπου η αξία ενός αγαθού αυξάνει με το χρόνο (π.χ. έργα τέχνης) για την εύρεση της κατάλληλης χρονικής στιγμής πώλησής του υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή στην οποία μεγιστοποιείται η παρούσα αξία του). (9 μονάδες)

---