1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- **Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

Γνωρίζουμε ήδη πώς παραγωγίζονται οι συναρτήσεις x^ν, ημx, συνx, e^x και $\ln x$. Επίσης, με τη βοήθεια των κανόνων παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου μπορούμε να παραγωγίσουμε και πολυπλοκότερες συναρτήσεις όπως για παράδειγμα τις $(x^3+1)^2$ και $(x^3+1)^3$ για τις οποίες έχουμε

$$((x^3+1)^2)' = ((x^3+1)(x^3+1))' = 3x^2(x^3+1) + 3x^2(x^3+1) = 6x^2(x^3+1) \text{ και}$$

$$((x^3+1)^3)' = [(x^3+1)^2(x^3+1)]' = 6x^2(x^3+1)(x^3+1) + (x^3+1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3+1)^2$$

Πώς όμως θα παραγωγίσουμε μια συνάρτηση όπως η $F(x) = \sqrt{x^2+1}$;
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F(x)$ προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x}$ θέσουμε όπου x το $g(x) = x^2+1$. Είναι, δηλαδή, $F(x) = \sqrt{x^2+1} = f(g(x))$. Γι'αυτό η συνάρτηση F λέγεται **σύνθεση** της g με την f.
Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$\boldsymbol{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}\,.$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g.

Επομένως,

$$((x^3+1)^3)' = 3(x^3+1)^2(x^3+1))' = 3(x^3+1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3+1)^2\,.$$

Επίσης, επειδή όπως είδαμε, είναι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, έχουμε:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ομοίως , $\quad (\text{ημ}(2x+1))' = \text{συν}(2x+1)\cdot(2x+1)' = 2\cdot\text{συν}(2x+1)$.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

$(c)' = 0$	$(cf(x))' = cf'(x)$
$(x)' = 1$	
$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(\text{ημ}x)' = \text{συν}x$	
$(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(e^x)' = e^x$	
$(\ell nx)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων

1. i) $f(x) = -5$ ii) $f(x) = x^4$ iii) $f(x) = x^9$.

2. i) $f(x) = x^{3/2}$ ii) $f(x) = x^{-3}$ iii) $f(x) = x^{-5}$.

3. i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ii) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $x>0$.

4. i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x>0$.

5. i) $f(x)=4x^3$ ii) $f(x)=6x^{-5}$ iii) $f(x)=-\frac{2}{5}x^{20}$.

6. i) $f(x)=\frac{-6}{\sqrt[4]{x}}$ ii) $f(x)=6x\sqrt{x}$.

7. i) $f(x)=x^4+3x^2$ ii) $f(x)=x^2+5+\frac{3}{x}$ iii) $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

8. i) $f(x)=8x^3-\eta\mu x+5$ ii) $f(x)=6\sigma\upsilon\nu x-8(x^2+x)$.

9. i) $f(x)=(x^3+1)(x^4+1)$ ii) $f(x)=\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)$.

10. i) $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x+3(x+1)(x-1)$ ii) $f(x)=4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x$.

11. i) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ ii) $f(x)=\frac{x}{\eta\mu x}$ iii) $f(x)=\frac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

12. i) $f(x)=\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$.

13. i) $f(x)=(x-1)^5$ ii) $f(x)=(2x+1)^5$ iii) $f(x)=(2x^2-3x)^5$.

14. i) $f(x)=\eta\mu^3 x$ ii) $f(x)=\eta\mu x^3$ iii) $f(x)=x\cdot\eta\mu 4x$ iv) $f(x)=\varepsilon\varphi 3x$.

15. i) $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$ ii) $f(x)=\sqrt{1+\eta\mu x}$.

16. i) $f(x)=e^{3x}$ ii) $f(x)=e^{-x^2}$ iii) $f(x)=e^{\alpha x+\beta}$ iv) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$.

17. i) $f(x)=\ln 2x$ ii) $f(x)=\ln\frac{1}{x^3}$.

iii) $f(x)=\ln(\alpha x+\beta)$ iv) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$.

18. i) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ii) $f(x)=e^x \ln x$.

APANTHSEIS

---

1. i) 0 ii) $4x^3$ iii) $9x^8$.
2. i) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ii) $-3x^{-4}$ iii) $-5x^{-6}$.
3. i) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ii) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.
4. i) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ii) $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

   iii) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x\sqrt[5]{x^2}}$.
5. i) $12x^2$ ii) $-30x^{-6}$ iii) $-8x^{19}$.
6. i) $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$ iii) $9\sqrt{x}$
7. i) $4x^3+6x$ ii) $2x-\frac{3}{x^2}$ iii) $1+\frac{1}{x^2}$.
8. i) $24x^2-\text{συν}x$ ii) $-6\text{ημ}x-8(2x+1)$.
9. i) $7x^6+4x^3+3x^2$ ii) $\text{συν}x-\text{συν}2x$.
10. i) $\text{συν}x-x\text{ημ}x+6x$

    ii) $(8x+3x^2)\text{ημ}x+(4x^2-6x)\text{συν}x$.
11. i) $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ ii) $\dfrac{\text{ημ}x-x\text{συν}x}{\text{ημ}^2x}$

    iii) $\dfrac{2+2\text{συν}x+x\text{ημ}x}{(1+\text{συν}x)^2}$.
12. i) $\dfrac{\text{ημ}x}{(1+\text{συν}x)^2}$ ii) $\dfrac{-6}{(x+1)^3}$.
13. i) $5(x-1)^4$ ii) $3x^2\cdot\text{συν}x^3$

    iii) $5(2x^2-3x)^4(4x-3)$.
14. i) $3\text{ημ}^2x\cdot\text{συν}x$ ii) $3x^2\cdot\text{συν}x^3$

    iii) $\text{ημ}4x+4x\cdot\text{συν}4x$ iv) $\dfrac{3}{\text{συν}^2 3x}$.
15. i) $\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$ ii) $\dfrac{\text{συν}x}{2\sqrt{1+\text{ημ}x}}$.

16. i) $3e^{3x}$ ii) $-2xe^{-x^2}$ iii) $\alpha e^{\alpha x+\beta}$

iv) $\dfrac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$.

17. i) $\dfrac{1}{x}$ ii) $-\dfrac{3}{x}$ iii) $\dfrac{\alpha}{\alpha x+\beta}$

iv) $\dfrac{1}{2(x-1)}$.

18. i) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ii) $e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

i) $f(x)=\text{εφ}x$ ii) $f(x)=\text{ημ}^2 3x$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$f'(x)=(\text{εφ}x)'$$

$$=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}\,x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}.$$

Άρα $\mathbf{(\text{εφ}x)'=\dfrac{1}{\text{συν}^2x}}$.

ii) Έχουμε

$$f'(x)=[(\text{ημ}3x)^2]'=2\cdot\text{ημ}3x\cdot(\text{ημ}3x)'=2\cdot\text{ημ}3x\cdot\text{συν}3x\cdot(3x)'$$

$$=3\cdot 2\text{ημ}3x\cdot\text{συν}3x=3\cdot\text{ημ}(2\cdot 3x)=3\text{ημ}6x,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\text{ημ}2\alpha=2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha$. **Α**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$y=\frac{\tan x}{\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\left(\frac{\tan x}{\sqrt{x}}\right)'\Rightarrow y'=\frac{(\tan x)'\sqrt{x}-\tan x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\tan x}{x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}-\frac{\tan x}{2\sqrt{x}}}{x}\Rightarrow y'=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos x}}{x}\Rightarrow y'=\frac{\frac{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}-\frac{\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}}{x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-\sin x\cdot\cos x}{x\cdot 2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{2x-\sin x\cdot\cos x}{2x\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{2x-\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2}}{2x\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{4x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{4x\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}$$

Υποερώτημα

$$y=\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\Rightarrow y'=\left(\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right)'\Rightarrow y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'+\left(\sin^{-1}x\right)'\Rightarrow$$

$$y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'+\left(\sin^{-1}x\right)'\Rightarrow y'=\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'+\left(\sin^{-1}x\right)'\Rightarrow$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)'+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$$

$$y'=-x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y'=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}\Rightarrow y'=\sqrt{\frac{(1-x)\cdot(1-x)}{(1-x)(1+x)}}\Rightarrow y'=\sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}}$$

για $1-x\neq 0\Rightarrow x\neq 1$ **Το** $\left(\sin^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Υποερώτημα

$$y = x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}x \Rightarrow y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' + \left(\sin^{-1}x\right)' \Rightarrow$$

$$y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' + \left(\sin^{-1}x\right)' \Rightarrow y' = (x)'\sqrt{1-x^2} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} + x\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)'\right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \sqrt{1-x^2} - x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = 2\sqrt{1-x^2}$$

Υποερώτημα

$$y = \frac{e^x + \sin x}{xe^x} \Rightarrow (y)' = \left(\frac{e^x + \sin x}{xe^x}\right)' \Rightarrow y' = \frac{\left(e^x + \sin x\right)' xe^x - \left(xe^x\right)'\left(e^x + \sin x\right)}{x^2e^{2x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\left(e^x + \cos x\right)xe^x - \left((x)'e^x + x\left(e^x\right)'\right)\left(e^x + \sin x\right)}{x^2e^{2x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\left(e^x + \cos x\right)xe^x - \left(e^x + xe^x\right)\left(e^x + \sin x\right)}{x^2e^{2x}}$$

Μετά από τις πράξεις στον αριθμητή και τις απλοποιήσεις προκύπτει τελικά:

$$y' = \frac{x\left(\cos x - \sin x\right) - \sin x - e^x}{x^2e^x}$$

Υποερώτημα γ

$y = \sqrt{1-x^2}$ Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο:

$$y=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow y'=\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\Rightarrow y'=\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^2\right)'\Rightarrow$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x\Rightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Βρίσκουμε την 2η παράγωγο:

$$y''=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'\Rightarrow y''=\frac{(x)'\sqrt{1+x^2}-x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{1+x^2}\Rightarrow y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\left(\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x\right)}{1+x^2}\Rightarrow$$

$$y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2}\Rightarrow y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\Rightarrow y''=\frac{\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\Rightarrow$$

$$y''=\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\Rightarrow y''=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\Rightarrow y''=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έχουμε: $y=xe^{-\frac{1}{x}}$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο.

$$y=xe^{-\frac{1}{x}}\Rightarrow y'=\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)'\Rightarrow y'=(x)'e^{-\frac{1}{x}}+x\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'\Rightarrow y'=e^{-\frac{1}{x}}+x\left(e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\right)\Rightarrow$$

$$y'=e^{-\frac{1}{x}}+x\left(e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\right)\Rightarrow y'=e^{-\frac{1}{x}}+xe^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\Rightarrow y'=e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x}\Rightarrow y'=e^{-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})$$