1 Διαδικασία διαγωνιοποίησης

Εστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος (ή ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος) διάστασης n. Είναι γνωστό ότι κάθε διάνυσμα

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

του χώρου V μπορεί να παρασταθεί και σαν πίνακας στήλη με τη μορφή

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε, επίσης, ένα ενδομορφισμό $f : V \longrightarrow V$, και έστω $A = (a_{ij})$ ο πίνακας του f ως προς κάποια βάση του V.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f (ή του A) είναι το πολυώνυμο

$$\mathcal{X}_f(t) \text{ (ή } \mathcal{X}_A(t)) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-t \end{vmatrix}.$$

Ιδιοτιμή ή **χαρακτηριστική τιμή** του f (ή του A) είναι κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που ανήκει στο $\mathbb{R}$. (Αν έχουμε $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο, πρέπει να ανήκει στο $\mathbb{C}$.) Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f (ή του A), τότε ικανοποιείται η σχέση

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \quad \text{ή} \quad AX = \lambda X,$$

για κάποιο **μη μηδενικό** διάνυσμα $\boldsymbol{x}$, το οποίο λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του f (ή του A) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τέλος, το σύνολο

$$E(\lambda) = \{x \in V / f(x) = \lambda x\} \quad \text{ή} \quad E(\lambda) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / AX = \lambda X \right\}$$

λέγεται **ιδιοχώρος** του f (ή του A) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, και είναι υποχώρος του V.
Ο ενδομορφισμός f (ή ο πίνακας A) διαγωνιοποιείται αν και μόνον αν κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ανήκει στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$), και η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμή είναι ίση με τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

2 Ασκήσεις

Παράδειγμα 1 *Θεωρούμε τον τελεστή $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται με τη σχέση*

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y, 2x - 2y),$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ο πίνακας του f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ βρίσκεται με το γνωστό τρόπο, και είναι ο

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή f είναι το

$$\begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 1 & -1-t & 0 \\ 2 & -2 & 0-t \end{vmatrix} = t - t^3 = t\,(1-t)\,(t+1)\,,$$

και όπως βλέπουμε έχει απλές και διαφορετικές ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές του f είναι 0, 1, και -1.

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ο τελεστής f διαγωνιοποιείται, δηλαδή υπάρχει μια βάση του $\mathbb{R}^3$, ως προς την οποία ο πίνακας του τελεστή είναι διαγώνιος. Για να βρούμε μια τέτοια βάση πρέπει να υπολογίσουμε τους ιδιοχώρους που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές 0, 1, και -1. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(0) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=0(x,y,z)=\mathbf{0}\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x+2y-z, x-y, 2x-2y)=\mathbf{0}\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+2y-z=0, x-y=0, 2x-2y=0\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y=x, z=3x\} = \\ &= \{(x,x,3x)/x\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $E(0)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του f, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Από όλα αυτά επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,\ 1,\ 3)$, το οποίο θα αποτελέσει το πρώτο διάνυσμα της νέας βάσης.

$$\begin{aligned} E(1) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=1(x,y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x+2y-z, x-y, 2x-2y)=(x,y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+2y-z=x, x-y=y, 2x-2y=z\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=z=2y\} = \\ &= \{(2y,y,2y)/y\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Από τα μη μηδενικά διανύσματα του ιδιοχώρου $E(1)$ επιλέγουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (2,\ 1,\ 2)$, σαν δεύτερο διάνυσμα της βάσης που ζητάμε.

Τέλος, θα έχουμε

$$\begin{aligned} E(-1) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=-1(x,y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x+2y-z, x-y, 2x-2y)=-(x,y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+2y-z=-x, x-y=-y, 2x-2y=-z\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=0, z=2y\} = \\ &= \{(0,y,2y)/y\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Από τα μη μηδενικά διανύσματα του ιδιοχώρου $E(-1)$ επιλέγουμε το $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0,\ 1,\ 2)$, ως το τελευταίο διάνυσμα της ζητούμενης βάσης.

Γνωρίζουμε, από τα προηγούμενα, ότι ο πίνακας του τελεστή f, ως προς τη βάση $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε τον πίνακα του f ως προς τη νέα βάση με το γνωστό τρόπο.

Συμβολίζουμε με $M'(f)$ τον πίνακα του f στη νέα βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Είναι γνωστό ότι οι δύο αυτοί πίνακες $M(f)$ και $M'(f)$ του τελεστή f συνδέονται με τη σχέση $M'(f) = P^{-1}M(f)P$, όπου P είναι ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ στη βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Ο πίνακας αυτός είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

ενώ ο αντίστροφος του P είναι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} M'(f) &= P^{-1}M(f)P = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Η διάταξη των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου θα αλλάξει, αν γίνει κάποια αλλαγή στην διάταξη της βάσης $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Παράδειγμα 2 *Θεωρούμε τον τελεστή $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται με τη σχέση*

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, 5z),$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ο πίνακας του f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ βρίσκεται με το γνωστό τρόπο, και είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή f θα είναι

$$\begin{vmatrix} 3-t & -2 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t \end{vmatrix} = -t^3 + 11t^2 - 35t + 25 = (1-t)(t-5)^2.$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του f είναι 5 και 1, πολλαπλότητας 2 και 1 αντίστοιχα. Θα υπολογίσουμε τους αντίστοιχους ιδιοχώρους.

$$\begin{aligned} E(1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 1(x, y, z)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (3x - 2y, -2x + 3y, 5z) = (x, y, z)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y = x, -2x + 3y = y, 5z = z\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y, z = 0\} = \\ &= \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\} = \{(1, 1, 0)x / x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Επίσης θα έχουμε

$$\begin{aligned} E(5) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=5(x,y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(3x-2y,-2x+3y,5z)=5(x,y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/3x-2y=5x,-2x+3y=5y,5z=5z\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y=-x\} = \\ &= \{(x,-x,z)\in\mathbb{R}^3/x,z\in\mathbb{R}\} = \{(1,-1,0)x+(0,0,1)z/x,z\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι η διάσταση του κάθε ιδιοχώρου είναι ίση με την πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής, οπότε ο τελεστής f διαγωνιοποιείται.

Ο διαγώνιος πίνακας θα βρεθεί αν επιλέξουμε μια βάση από τον κάθε ιδιοχώρο. Από τη μορφή που έχουν οι ιδιοχώροι βλέπουμε ότι το σύστημα $\{(1,1,0)\}$ αποτελεί βάση του $E(1)$, ενώ το σύστημα $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ αποτελεί μια βάση του $E(5)$. Ο πίνακας του f ως προς τη βάση

$$\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$$

είναι διαγώνιος, και συγκεκριμένα ο πίνακας

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Όπως ξέρουμε ο πίνακας A και ο πίνακας D συνδέονται με μια σχέση της μορφής $D = P^{-1}AP$, όπου P είναι ο πίνακας μετάβασης από τη συνήθη βάση στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος του πίνακα P είναι ο πίνακας

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δηλαδή ξαναβρίσκουμε τον προηγούμενο διαγώνιο πίνακα.

Παράδειγμα 3 *Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix},$$

με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\mathcal{X}_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & -6 & -6 \\ -1 & 4-t & 2 \\ 3 & -6 & -4-t \end{vmatrix} = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4 = (1-t)(t-2)^2 .$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές 1 και 2 του A ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{R}$, επομένως η πρώτη συνθήκη του προηγουμένου θεωρήματος ικανοποιείται.

Θα υπολογίσουμε, τώρα, τους αντίστοιχους ιδιοχώρους. Έχουμε

$$\begin{aligned}
E(1) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/AX = X \right\} = \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/ \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times 1}/ \begin{pmatrix} 5x-6y-6z \\ -x+4y+2z \\ 3x-6y-4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{ X \in M_{3\times 1}/5x-6y-6z = x, -x+4y+2z = y, 3x-6y-4z = z \} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/x = -3y, z = -3y \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ -3y \end{pmatrix} /y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} y/y \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Επίσης θα έχουμε

$$\begin{aligned}
E(2) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/AX = 2X \right\} = \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/ \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times 1}/ \begin{pmatrix} 5x-6y-6z \\ -x+4y+2z \\ 3x-6y-4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{ X \in M_{3\times 1}/5x-6y-6z = 2x, -x+4y+2z = 2y, 3x-6y-4z = 2z \} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/x = 2y+2z \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} /y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z/y, z \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Από τις προηγούμενες πράξεις βλέπουμε ότι ο ιδιοχώρος $E(1)$ έχει διάσταση 1, εφόσον μια βάση *του είναι το διάνυσμα στήλη*

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

και ο ιδιοχώρος $E(2)$ έχει διάσταση 2, εφόσον τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \textit{ και } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μια βάση του. Έτσι, ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος, επομένως ο πίνακας A διαγωνιοποιείται.

Όπως είδαμε και στην περίπτωση των γραμμικών τελεστών, ο διαγώνιος πίνακας B, με τον οποίο είναι όμοιος ο πίνακας A, μπορεί να βρεθεί αν τοποθετήσουμε πάνω στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Δηλαδή πρόκειται για τον πίνακα $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$.

Αν όμως θέλουμε να βρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P, για τον οποίο ισχύει η σχέση $B = P^{-1}AP$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων, και συγκεκριμένα τα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \textit{ και } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι ο πίνακας P θα είναι

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η διάταξη των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου στον διαγώνιο πίνακα, όπως και στους τελεστής, εξαρτάται από τη διάταξη της βάσης των ιδιοδιανυσμάτων.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα P βρίσκουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αν αλλάξουμε τη διάταξη των στηλών του πίνακα P, θα αλλάξει η διάταξη των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου στον διαγώνιο πίνακα.

Παράδειγμα 4 *Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 1 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix},$$

με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τις δυνάμεις A^k, για κάθε φυσικό αριθμό k.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A(t) &= \begin{vmatrix} 13-t & 1 & 4 \\ 1 & 13-t & 4 \\ 4 & 4 & 10-t \end{vmatrix} = -t^3 + 36t^2 - 396t + 1296 = \\ &= (6-t)\,(t-12)\,(t-18)\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, και μάλιστα είναι απλές. Επομένως ο πίνακας διαγωνιοποιείται, και μάλιστα ο διαγώνιος πίνακας είναι ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε τις δυνάμεις A^k είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P, για τον οποίο ισχύει $B = P^{-1}AP$.

Όπως ξέρουμε ο πίνακας P έχει σαν στήλες ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Άρα πρέπει να βρούμε τους ιδιοχώρους του A.

$$\begin{aligned}
E(6) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}/AX = 6X \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times1}/ \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 1 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times1}/ \begin{pmatrix} 13x + y + 4z \\ x + 13y + 4z \\ 4x + 4y + 10z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{X \in M_{3\times1}/13x + y + 4z = 6x, x + 13y + 4z = 6y, 4x + 4y + 10z = 6z\} = \\
&= \{X \in M_{3\times1}/z = -2x, y = x\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} \in M_{3\times1}/x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x/x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(12) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times1}/AX = 12X \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times1}/ \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 1 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times1}/ \begin{pmatrix} 13x + y + 4z \\ x + 13y + 4z \\ 4x + 4y + 10z \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{X/13x + y + 4z = 12x, x + 13y + 4z = 12y, 4x + 4y + 10z = 12z\} = \\
&= \{X \in M_{3\times1}/x = -y, z = 0\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times1}/x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x/x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Τέλος θα έχουμε

$$\begin{aligned}
E(18) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/AX = 18X \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times 1}/ \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 1 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ X \in M_{3\times 1}/ \begin{pmatrix} 13x + y + 4z \\ x + 13y + 4z \\ 4x + 4y + 10z \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{X/13x + y + 4z = 18x, x + 13y + 4z = 18y, 4x + 4y + 10z = 18z\} = \\
&= \{X \in M_{3\times 1}/x = z, y = z\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}/x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x/x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας P θα είναι

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ενώ ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Επομένως, όπως ξέρουμε, θα ισχύει η σχέση $B = P^{-1}AP$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\begin{aligned}
B^2 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P, \\
B^3 &= B^2B = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^3P.
\end{aligned}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι ισχύει $B^k = P^{-1}A^kP$, για κάποιο φυσικό αριθμό k, τότε θα έχουμε

$$B^{k+1} = B^kB = (P^{-1}A^kP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^{k+1}P,$$

οπότε θα ισχύει

$$B^k = P^{-1}A^kP, \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } k.$$

Από την τελευταία ισότητα είναι προφανές ότι θα έχουμε $A^k = PB^kP^{-1}$, δηλαδή μπορούμε να βρούμε τη δύναμη A^k, για κάθε φυσικό αριθμό k. Το πλεονέκτημα της νέας ισότητας είναι ότι η δύναμη B^k υπολογίζεται εύκολα, εφόσον ο B είναι διαγώνιος, οπότε η εύρεση της δύναμης A^k ανάγεται στον υπολογισμό του γινομένου τριών πινάκων.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^k & 0 & 0 \\ 0 & 12^k & 0 \\ 0 & 0 & 18^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}6^k + \frac{1}{2}12^k + \frac{1}{3}18^k & \frac{1}{6}6^k - \frac{1}{2}12^k + \frac{1}{3}18^k & \frac{1}{3}18^k - \frac{1}{3}6^k \\ \frac{1}{6}6^k - \frac{1}{2}12^k + \frac{1}{3}18^k & \frac{1}{6}6^k + \frac{1}{2}12^k + \frac{1}{3}18^k & \frac{1}{3}18^k - \frac{1}{3}6^k \\ \frac{1}{3}18^k - \frac{1}{3}6^k & \frac{1}{3}18^k - \frac{1}{3}6^k & \frac{2}{3}6^k + \frac{1}{3}18^k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5 *Θεωρούμε τον τετραγωνικό* 3×3 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix},$$

και το πολυώνυμο $\psi(x) = x^{10} + 2x^5 - 3x^3 + 4$, *και ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τη δύναμη* $\psi(A)$. *Επειδή το πολυώνυμο είναι βαθμού* 10, *θα πρέπει να υπολογίσουμε όλες τις μικρότερες ή ίσες του* 10 *δυνάμεις του πίνακα* A, *και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τις ανάλογες τιμές στο πολυώνυμο* $\psi(x)$. *Είναι προφανές ότι πρόκειται για μια χρονοβόρα διαδικασία. Μπορούμε, όμως, να εκμεταλευτούμε την παρουσία του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.*

Θα βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 1 \\ -1 & 3-x & 0 \\ -4 & 13 & -1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + x + 2.$$

Διαιρούμε το πολυώνυμο $\psi(x)$ *με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A, *οπότε βρίσκουμε ως πηλίκο το πολυώνυμο*

$$\pi(x) = -x^7 - x^6 - 2x^5 - 5x^4 - 9x^3 - 20x^2 - 39x - 74,$$

και ως υπόλοιπο το πολυώνυμο

$$\upsilon(x) = 153x^2 + 152x + 152.$$

Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει η σχέση $\psi(x) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$. *Αν στην ταυτότητα αυτή αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή* x *με τον πίνακα* A, *θα πάρουμε* $\psi(A) = \mathcal{X}_A(A) \cdot \pi(A) + \upsilon(A) = \upsilon(A)$, *εφόσον ισχύει* $\mathcal{X}_A(A) = 0$. *Άρα έχουμε να υπολογίσουμε κατά πολύ μικρότερες δυνάμεις του* A. *Επειδή*

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -2 \\ -2 & 9 & -1 \\ -5 & 26 & -3 \end{pmatrix},$$

θα έχουμε τελικά

$$\psi(A) = 153A^2 + 152A + 152 = \begin{pmatrix} -459 & 1989 & -154 \\ -458 & 1985 & -153 \\ -1373 & 5954 & -459 \end{pmatrix}.$$

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι μια σημαντική βοήθεια.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley-Hamilton μπορούμε να βρούμε και τον αντίστροφο ενός αντιστρέψιμου πίνακα. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6 *Θεωρούμε τον* 3×3 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A *είναι*

$$\mathcal{X}_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2 & 0-t & 1 \\ 1 & 1 & 0-t \end{vmatrix} = -t^3 + t^2 + 2t - 2.$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει ότι ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο αυτό, επομένως θα πρέπει να ισχύει

$$-A^3 + A^2 + 2A - 2I_3 = 0,$$
$$2I_3 = -A^3 + A^2 + 2A = A(-A^2 + A + 2I_3).$$

Άρα ο αντίστροφος πίνακας του A θα δίνεται από τη σχέση

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + A + 2I_3),$$

οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2}\left[-\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2I_3\right] = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7 *Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

και να εκφράσετε τον A^4 σαν γραμμικό συνδυασμό των πινάκων A, A^2 και I_3.

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\mathcal{X}_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 & 2 \\ -1 & 0-t & 1 \\ 3 & -4 & -3-t \end{vmatrix} = -t^3 - 2t^2 + 7t + 12,$$

οπότε από το Θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{X}_A(A) &= -A^3 - 2A^2 + 7A + 12I_3 \\ A\left(-A^2 - 2A + 7I_3\right) &= -12I_3 \\ A\left[-\tfrac{1}{12}\left(-A^2 - 2A + 7I_3\right)\right] &= I_3 \\ A\left[\tfrac{1}{12}\left(A^2 + 2A - 7I_3\right)\right] &= I_3. \end{aligned}$$

Επομένως ο αντίστροφος του A θα είναι

$$A^{-1} = \tfrac{1}{12}\left(A^2 + 2A - 7I_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει επίσης

$$\begin{aligned} A^3 &= -2A^2 + 7A + 12I_3 \\ A^4 &= A\left(-2A^2 + 7A + 12I_3\right) = -2A^3 + 7A^2 + 12A = \\ &= -2(-2A^2 + 7A + 12I_3) + 7A^2 + 12I_3 = \\ &= 11A^2 - 14A - 12I_3, \end{aligned}$$

δηλαδή ο A^4 έγινε γραμμικός συνδυασμός των πινάκων A, A^2 και I_3. ■