ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ

Μια συνάρτηση

$$f : A \times B \to C$$

αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος *(a,b)* (με $a \in A$ και $b \in B$) ένα στοιχείο $c \in C$. Γράφουμε τότε

$$f(a,b)=c.$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί και ως *πράξη*.

Εσωτερική πράξη σε ένα σύνολο Α είναι μια συνάρτηση

$$* : A \times A \to A$$

Εξωτερική πράξη στο Α (με συντελεστές στο Κ) είναι μια συνάρτηση

$$* : K \times A \to A$$

Και στις δύο περιπτώσεις, αντί για $*(a,b)$ συνηθίζουμε να γράφουμε $a * b$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο *R* των πραγματικών αριθμών είναι εσωτερικές πράξεις. Αντιστοιχίζουν σε ένα κάθε ζεύγος *(x,y)* πραγματικών αριθμών έναν νέο πραγματικό αριθμό, το άθροισμά τους $x+y$ και γινόμενό τους $x \cdot y$ αντίστοιχα.

Στο σύνολο $M_{3\times3}$ των τετραγωνικών πινάκων 3x3, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξεις εσωτερικές, ενώ ο πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα είναι πράξη εξωτερική (από το $R\times$ $M_{3\times3}$ στο $M_{3\times3}$).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα θεωρούμε μια <u>εσωτερική πράξη</u> + που καταχρηστικά θα ονομάζουμε «πρόσθεση» και μια <u>εξωτερική πράξη</u> $\bullet$ που θα ονομάζουμε «εξωτερικό πολλαπλασιασμό» ή «βαθμωτό πολλαπλασιασμό»

3.2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Έστω V ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μια εσωτερική και μία εξωτερική:

+ (πρόσθεση)
- (βαθμωτός πολλαπλασιασμός με συντελεστές στο R)

Δηλαδή ισχύουν

(i) $V \neq \emptyset$

(ii) για κάθε $u, v \in V$, $u + v \in V$
(ή όπως αλλιώς λέμε, το V είναι *κλειστό* ως προς την πρόσθεση)

(iii) για κάθε $\lambda \in R,\ u \in V$, $u \cdot v \in V$
(ή όπως αλλιώς λέμε, το V είναι *κλειστό* ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό)

Το σύνολο V θα λέγεται ***διανυσματικός χώρος*** (στο R), αν ισχύουν οι επόμενες οκτώ ιδιότητες

<u>Ως προς την πρόσθεση</u>:

A1. για κάθε $u, v \in V$, $u + v = v + u$
(αντιμεταθετική ιδιότητα)

A2. για κάθε $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$
(προσεταιριστική ιδιότητα)

A3. υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbf{0} \in V$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in V$
$$u + 0 = u = 0 + u,$$
Το **0** λέγεται ουδέτερο στοιχείο του V.

A4. για κάθε $u \in V$, υπάρχει ένα στοιχείο $u' \in V$, τέτοιο ώστε
$$u + u' = \mathbf{0} = u' + u.$$
Το u' ονομάζεται συμμετρικό στοιχείο του u και συμβολίζεται $-u$.

<u>Ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιαμό</u>: για κάθε $\lambda, \mu \in R$ και $u, v \in V$

B1. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

B2. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

B3. $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

B4. $1 \cdot u = u$

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου θα λέγονται και ***διανύσματα***.

<u>**Σημείωση:**</u> όταν σε ένα μη κενό σύνολο V με μια εσωτερική πράξη ισχύουν οι ιδιότητες **A2-A4** λέμε ότι το σύνολο αποτελεί *ομάδα*. Εάν επιπλέον ισχύει και η ιδιότητα **A1** λέμε ότι αποτελεί *αντιμεταθετική ομάδα*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Το σύνολο $V = M_{2\times 3}$ όλων των 2x3 πινάκων με τις συνηθισμένες πράξεις + (πρόσθεση πινάκων) και $\bullet$ (πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα) είναι διανυσματικός χώρος.

Προφανώς το σύνολο V είναι μη κενό και κλειστό ως προς τις δύο πράξεις. Τις ιδιότητες **Α1-Α4** και **Β1-Β4** τις έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1. Το ουδέτερο στοιχείο **0** είναι ο 2x3 μηδενικός πίνακας.

2) Το σύνολο $V = P(x)$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές έχει στοιχεία της μορφής

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Το άθροισμα πολυωνύμων και το γινόμενο πραγματικού αριθμού με πολυώνυμο ορίζονται με τον συνήθη τρόπο, δηλαδή αν $\lambda \in R$ και $p(x), q(x) \in P(x)$ με

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

και έστω $m \le n$, τότε

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in P(x)$$

(θεωρώντας τους τυχόν επιπλέον συντελεστές $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{m+1}$ ίσους με 0)

$$\lambda p(x) = \lambda \alpha_n x^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0 \in P(x)$$

Εύκολα δείχνεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες **Α1-Α4** και **Β1-Β4**, ενώ το ουδέτερο στοιχείο είναι το μηδενικό πολυώνυμο

$$\mathbf{0}(x) = 0$$

3) Έστω $V = M$ το σύνολο όλων των πινάκων στο R. Αν A είναι ένας πίνακας 2x3 και B ένας πίνακας 7x9, τότε δεν ορίζεται το άθροισμα $A+B$, δηλαδή το M δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση πινάκων. Συνεπώς το M με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο.

4) Έστω $V = R^3 = R \times R \times R = \{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$, με τις συνήθεις πράξεις

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αποτελεί διανυσματικό χώρο με ουδέτερο στοιχείο το μηδενικό διάνυσμα **0** = (0,0,0).

Σημείωση: Γενικά, το σύνολο R^n, όλων των n-άδων πραγματικών αριθμών με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού αποτελεί διανυσματικό χώρο.

5) Έστω $V=Z^3=\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}=\{(x,y,z)/\,x,y,z\in Z\}$, με τις συνήθεις πράξεις

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$
$$\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$

Το σύνολο είναι μη κενό διότι $\mathbf{0}=(0,0,0)\in Z^3$, είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση αλλά όχι ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, διότι π.χ.

$$\text{αν } \lambda=\frac{1}{2} \text{ και } u=(1,2,3)\in Z^3, \text{ τότε } \lambda u=\left(1/2\,,1\,,3/2\right)\notin Z^3.$$

Συνεπώς το σύνολο $V=Z^3$ δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο.

6) Έστω $V=R^2=\{(x,y)/\,x,y\in R\}$. Ορίζουμε δύο πράξεις $\oplus$ και $\circ$ ως εξής:

$$(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$\lambda\circ(x,y)=(\lambda x,0)$$

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του ορισμού εκτός από την ιδιότητα **B4** (δηλ. $1\cdot u=u$), διότι π.χ. αν $u=(2,3)$ τότε

$$1\circ u=1\circ(2,3)=(2,0)\neq u.$$

Συνεπώς το σύνολο R^2 με τις παραπάνω πράξεις δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Σε έναν διανυσματικό χώρο ισχύουν τα εξής:

- $0u=\mathbf{0}$ για κάθε $u\in V$
- $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$ για κάθε $\lambda\in R$
- Αν $\lambda u=\mathbf{0}$ όπου $\lambda\in R$ και $u\in V$, τότε $\lambda=0$ **ή** $u=\mathbf{0}$
- $(-\lambda)u=\lambda(-u)=-\lambda u$ για κάθε $\lambda\in R$ και $u\in V$

Η απόδειξή τους είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση.

3.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $W\subseteq V$. Το W θα λέγεται ***διανυσματικός υποχώρος*** του V εάν είναι και το ίδιο διανυσματικός χώρος με τις ίδιες πράξεις.

Το παρακάτω θεώρημα μας απαλλάσσει από τις 8 ιδιότητες του ορισμού για να αποφανθούμε ότι έχουμε διανυσματικό χώρο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $W \subseteq V$. Το W είναι διανυσματικός υποχώρος του V εάν και μόνο εάν

(i) $0 \in W$,
(ii) Το W είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση
(iii) Το W είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι ισχύουν οι οκτώ ιδιότητες του ορισμού του διανυσματικού χώρου.

<u>Σημείωση</u>: Για κάθε διανυσματικό χώρο V υπάρχουν δύο «στοιχειώδεις» υποχώροι. Το ίδιο το V και το $\{\mathbf{0}\}$.

Το πρώτο είναι προφανές διότι το V είναι υποσύνολο του εαυτού του και είναι διανυσματικός χώρος.

Για το δεύτερο έχουμε

(i) $\mathbf{0} \in \{\mathbf{0}\}$,
(ii) Αν $u, v \in \{\mathbf{0}\}$, τότε $u = v = \mathbf{0}$, οπότε $u + v = \mathbf{0} \in \{\mathbf{0}\}$, δηλαδή το $\{\mathbf{0}\}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση
(iii) Αν $\lambda \in R$ και $u \in \{\mathbf{0}\}$, τότε $u = \mathbf{0}$, οπότε $\lambda u = \mathbf{0} \in \{\mathbf{0}\}$, δηλαδή το $\{\mathbf{0}\}$ είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω $V = R^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$. Θα εξετάσουμε αν τα παρακάτω υποσύνολα του R^3 είναι διανυσματικοί υποχώροι:

$W_1 = \{(a,b,0) \mid a,b \in R\}$
$W_2 = \{(a,b,1) \mid a,b \in R\}$
$W_3 = \{(a,b,1) \mid a,b \in R\} \cup \{(0,0,0)\}$
$W_4 = \{(a,a,a) \mid a \in R\}$
$W_5 = \{(a,b,a+2b) \mid a,b \in R\}$

- Το υποσύνολο W_1 είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διότι

(i) $\mathbf{0} = (0,0,0) \in W_1$ (για $a=b=0$)
(ii) είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση καθώς για $u, v \in W_1$ με $u = (a,b,0)$ και $v = (a',b',0)$, ισχύει
$$u + v = (a + a', b + b', 0) \in W_1$$
(iii) είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό καθώς για $\lambda \in R$ και $u \in W_1$ με $u = (a,b,0)$, ισχύει
$$\lambda u = (\lambda a, \lambda b, 0) \in W_1$$

- Το υποσύνολο W_2 δεν είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διότι

$$\mathbf{0}=(0,0,0) \notin W_2$$

- Το υποσύνολο W_3 δεν είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διότι παρόλο που $\mathbf{0}=(0,0,0) \in W_3$, το σύνολο δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση (ούτε ως προς τον πολλαπλασιασμό). Πράγματι, αν $u=(a,b,1)$ και $v=(a',b',1)$, τότε

$$u+v=(a+a',b+b',2) \notin W_3$$

- Το υποσύνολο W_4 είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διότι

(i) $\mathbf{0} = (0,0,0) \in W_4$ (για $a=0$)

(ii) είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση καθώς για $u,v \in W_4$ με $u=(a,a,a)$ και $v=(a',a',a')$, ισχύει

$$u+v=(a+a',a+a',a+a') \in W_4$$

(iii) είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό καθώς για $\lambda \in R$ και $u \in W_4$ με $u=(a,a,a)$, ισχύει

$$\lambda u=(\lambda a,\lambda a,\lambda a) \in W_4$$

- Το υποσύνολο W_5 είναι διανυσματικός υποχώρος του R^3 διότι

(i) $\mathbf{0} = (0,0,0) \in W_5$ (για $a=b=0$)

(ii) είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση καθώς για $u,v \in W_5$ με $u=(a,b,a+2b)$ και $v=(a',b',a'+2b')$, ισχύει

$$\begin{aligned} u+v &= (a+a',b+b',a+2b+a'+2b') \\ &= (a+a',b+b',(a+a')+2(b+b')) \in W_5 \end{aligned}$$

(iii) είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό καθώς για $\lambda \in R$ και $u \in W_5$ με $u=(a,b,a+2b)$, ισχύει

$$\begin{aligned} \lambda u &= (\lambda a,\lambda b,\lambda(a+2b)) \\ &= (\lambda a,\lambda b,\lambda a+2(\lambda b)) \in W_5 \end{aligned}$$

2) Έστω $V=M_{3\times 3}$, ο διανυσματικός χώρος των 3x3 πινάκων στο R. Θα εξετάσουμε αν το υποσύνολο των *άνω τριγωνικών* πινάκων

$$W=\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in R\}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος:

(i) $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ni W$ (για $a=b=c=d=e=f=0$)

Έστω $\lambda \in R$ και $u, v \in W$, με $u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ και $v = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}$

Τότε,

(ii) $$u + v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ 0 & d + d' & e + e' \\ 0 & 0 & f + f' \end{pmatrix} \ni W$$

(iii) $$\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ 0 & \lambda d & \lambda e \\ 0 & 0 & \lambda f \end{pmatrix} \ni W$$

Συνεπώς, το W είναι διανυσματικός υποχώρος του V.

Σημείωση: Όμοια δείχνουμε ότι το σύνολο των κάτω τριγωνικών πινάκων είναι διανυσματικός υποχώρος του $M_{3\times 3}$. Το αποτέλεσμα γενικεύεται φανερά για τον διανυσματικό χώρο $M_{n\times n}$.

3) Έστω $V = P(x)$, ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων στο R. Θα εξετάσουμε αν το υποσύνολό του $P_n(x)$, που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ n (συμπεριλαμβανομένου του μηδενικού πολυωνύμου που χαρακτηρίζεται συχνά ως αδιαβάθμητο) είναι διανυσματικός υποχώρος του V.

(i) Το μηδενικό πολυώνυμο $\mathbf{0}(x) = 0$ ανήκει στο $P_n(x)$.

Έστω $\lambda \in R$ και $p(x), q(x) \in P_n(x)$.

(ii) Το πολυώνυμο $p(x) + q(x)$ έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του n (είτε είναι το μηδενικό πολυώνυμο) άρα ανήκει στο $P_n(x)$.

(iii) Το πολυώνυμο $\lambda p(x)$ έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του n (είτε είναι το μηδενικό πολυώνυμο) άρα ανήκει στο $P_n(x)$.

Συνεπώς, το $P_n(x)$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $V = P(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και W_1, W_2 δύο υποχώροι του V. Το υποσύνολο $W = W_1 \cap W_2$ είναι επίσης διανυσματικός υποχώρος του V.

Απόδειξη: Θα δείξουμε τις τρεις ιδιότητες του υποχώρου για το W:

(i) Εφόσον $\mathbf{0}\in W_1$ και $\mathbf{0}\in W_2$, ισχύει $\mathbf{0}\in W_1 \cap W_2 = W$.

(ii) Έστω $u,v \in W = W_1 \cap W_2$. Τότε $u,v \in W_1$ και $u,v \in W_2$. Εφόσον τα υποσύνολα W_1, W_2 είναι υποχώροι του V θα ισχύει

$$u+v \in W_1 \text{ και } u+v \in W_2 .$$

Άρα $u+v \in W_1 \cap W_2 = W$.

(iii) Έστω $\lambda \in R$ και $u \in W = W_1 \cap W_2$. Τότε $u \in W_1$ και $u \in W_2$. Εφόσον τα υποσύνολα W_1, W_2 είναι υποχώροι του V θα ισχύει

$$\lambda u \in W_1 \text{ και } \lambda u \in W_2 .$$

Άρα $\lambda u \in W_1 \cap W_2 = W$.

Συνεπώς, το W είναι διανυσματικός υποχώρος του V. ■

<u>Σημείωση</u>: Το υποσύνολο $W_1 \cup W_2$ δεν είναι απαραίτητα διανυσματικός υποχώρος. Για παράδειγμα, έστω $V = R^2$ και

$$W_1 = \{(a,0) \mid a \in R\}, \quad W_2 = \{(0,b) \mid b \in R\}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα υποσύνολα W_1, W_2 είναι υποχώροι του V. Ωστόσο το $W_1 \cup W_2$ δεν είναι υποχώρος διότι δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Πράγματι, για $u=(3,0)$ και $v=(0,5)$

$$u \in W_1 \cup W_2 \text{ και } v \in W_1 \cup W_2 \text{ ενώ } u+v=(3,5) \notin W_1 \cup W_2$$

3.4 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ – ΧΩΡΟΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$. Κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$, λέγεται ***γραμμικός συνδυασμός*** των $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Το σύνολο αυτών των γραμμικών συνδυασμών συμβολίζεται

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$$

και αποτελεί διανυσματικό υποχώρο του V. Λέμε ότι είναι ***ο χώρος που παράγεται*** από τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$

Σημείωση: Αν $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, τότε γράφουμε και $\langle S \rangle$ αντί για $\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$.

Ας αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το σύνολο $W = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$ είναι διανυσματικός υποχώρος του V.

Απόδειξη: Θα δείξουμε τις τρεις ιδιότητες του υποχώρου:

(i) $\mathbf{0} = 0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_n \ni W$

Έστω $\lambda \in R$ και $u, v \in W$, με

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n \quad \text{και} \quad v = \lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2 + ... + \lambda_n' u_n$$

Τότε,

(ii)
$$\begin{aligned} u + v &= (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n) + (\lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2 + ... + \lambda_n' u_n) \\ &= (\lambda_1 u_1 + \lambda_1' u_1) + (\lambda_2 u_2 + \lambda_2' u_2) + ... + (\lambda_n u_n + \lambda_n' u_n) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_1')u_1 + (\lambda_2 + \lambda_2')u_2 + ... + (\lambda_n + \lambda_n')u_n \ni W \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n) \\ &= \lambda(\lambda_1 u_1) + \lambda(\lambda_2 u_2) + ... + \lambda(\lambda_n u_n) \\ &= (\lambda\lambda_1)u_1 + (\lambda\lambda_2)u_2 + ... + (\lambda\lambda_n)u_n \ni W \quad \blacksquare \end{aligned}$$

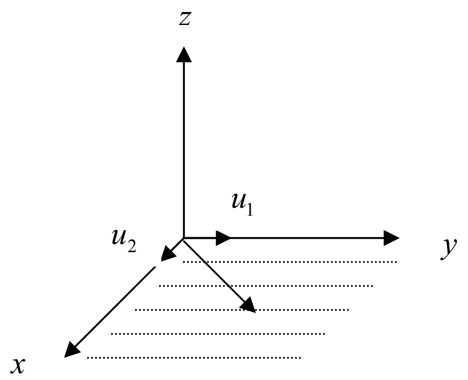
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $V = R^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$ και $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$. Ο χώρος που παράγουν τα δύο διανύσματα είναι

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\} \\ &= \{\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\} \\ &= \{(\lambda_1,0,0) + (0,\lambda_2,0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\} \\ &= \{(\lambda_1, \lambda_2, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\} \end{aligned}$$

Ο υποχώρος μπορεί να γραφεί και $\langle u_1, u_2 \rangle = \{(a,b,0) \mid a,b \in R\}$.

Σημείωση: Παραστατικά, ο αρχικός διανυσματικός χώρος είναι ο γνωστός μας τρισδιάστατος χώρος R^3, τα u_1, u_2 είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες *Ox* και *Oy* αντίστοιχα, ενώ ο υποχώρος που παράγουν είναι το επίπεδο *Oxy*. Πράγματι, κάθε διάνυσμα του επιπέδου *Oxy* γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 (ουσιαστικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο υποχώρος είναι ο δισδιάστατος χώρος R^2).



3.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ λέγονται ***γραμμικά εξαρτημένα*** αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_\nu u_n = \mathbf{0}$$

Διαφορετικά τα διανύσματα θα λέγονται ***γραμμικά ανεξάρτητα***.

Δηλαδή, τα διανύσματα $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_\nu u_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο R^2.

- για τα διανύσματα $u_1 = (1,2)$ και $u_2 = (2,4)$ παρατηρούμε ότι

$$2u_1 - 1u_2 = (0,0) = \mathbf{0}$$

  οπότε τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα[1].

- για τα διανύσματα $u_1 = (1,0)$ και $u_2 = (0,1)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \end{aligned}$$

[1] ουσιαστικά είναι γραμμικά εξαρτημένα διότι το ένα εξαρτάται από το άλλο, καθώς $u_2 = 2u_1$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

οπότε τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- για τα διανύσματα $u_1 = (1,0)$ και $u_2 = (1,1)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,1) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1, 0) + (\lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

οπότε τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2) Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V=M_{2x2}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in R\right\}$ και τα διανύσματα:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί ο υποχώρος $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

β) Να δειχθεί ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

γ) Αν $u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι τα u_1, u_2, u_3, u_4 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έχουμε,

α) $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \,|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\}$

$$= \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\}$$

Πρόκειται για τον υποχώρο των 2x2 κάτω τριγωνικών πινάκων.

β) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

οπότε τα τρία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

γ) Παρατηρούμε ότι $u_4 = 2u_3 + 1u_2$, δηλαδή

$$0u_1 + 1u_2 + 2u_3 - 1u_4 = \mathbf{0}$$

άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

3.6 ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΒΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Ένα σύνολο $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ θα λέγεται ***βάση*** του διανυσματικού χώρου αν

(i) Τα διανύσματα $u_1, u_2, ..., u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

(ii) Κάθε διάνυσμα του V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, ..., u_n$, δηλ. $\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle = V$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το σύνολο $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου V αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα του V γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, ..., u_n$

Απόδειξη: Έστω ότι το σύνολο S αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου V και $u \in V$. Το u γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ τέτοια ώστε

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n \qquad (*)$$

Έστω ότι το u γράφεται και με διαφορετικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_n' \in R$ τέτοια ώστε

$$u = \lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2 + ... + \lambda_n' u_n \qquad (**)$$

Αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις (*) και (**) κατά μέλη παίρνουμε

$$(\lambda_1 - \lambda_1')u_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')u_2 + ... + (\lambda_n - \lambda_n')u_n = \mathbf{0}$$

κι επειδή τα διανύσματα $u_1, u_2, ..., u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα παίρνουμε

$$\lambda_1 - \lambda_1' = \lambda_2 - \lambda_2' = \cdots = \lambda_n - \lambda_n' = 0$$

και τελικά

$$\lambda_1 = \lambda_1',\ \lambda_2 = \lambda_2',\ \ldots,\ \lambda_n = \lambda_n'$$

δηλαδή οι εκφράσεις (*) και (**) είναι ταυτόσημες.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε διάνυσμα του V γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Θα δείξουμε ότι το $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου. Προφανώς $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = V$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}$$

Ισχύει επίσης

$$0u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n = \mathbf{0}$$

Από τη μοναδικότητα της υπόθεσης παίρνουμε

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \ldots,\ \lambda_n = 0$$

όπως ακριβώς θέλαμε. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο R^3. Τα διανύσματα

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$$

αποτελούν βάση του R^3:

(i) Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

(ii) Τα διανύσματα παράγουν το χώρο:

Έστω $u = (a,b,c) \in R^3$. Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι το u γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2, e_3:

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3$$

<u>Σημείωση</u>: Η τελευταία έκφραση για το u είναι μοναδική. Για παράδειγμα το διάνυσμα $u = (7,8,9)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης:

$$u = 7e_1 + 8e_2 + 9e_3$$

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε και το διάνυσμα $e_4 = (1,1,1)$, τα e_1, e_2, e_3, e_4 είναι γραμμικά εξαρτημένα (άρα δεν αποτελούν βάση) και το $u = (7,8,9)$ δεν γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\begin{aligned} u &= 7e_1 + 8e_2 + 9e_3 + 0e_4 \\ &= 6e_1 + 7e_2 + 8e_3 + 1e_4 \\ &= 5e_1 + 6e_2 + 7e_3 + 2e_4 \\ &\text{κλπ.} \end{aligned}$$

2) Στον ίδιο χώρο R^3 θα δείξουμε ότι τα διανύσματα

$$u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (1,1,0),\ u_3 = (1,1,1)$$

αποτελούν βάση.

(i) Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(ii) Τα διανύσματα παράγουν το χώρο:

Έστω $u = (a,b,c) \in R^3$. Αναζητούμε συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ τέτοιους ώστε

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

ή

$$(a,b,c) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1)$$

ή

$$(a,b,c) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3)$$

Δηλαδή, αναζητούμε τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_3 = c \end{cases}$$

Προφανώς έχει τη λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (a-b, b-c, c)$, άρα το u γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3.

3) Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο

$$M_{2x3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in R \right\}.$$

Τα διανύσματα

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση. Η απόδειξη γίνεται όπως στο Παράδειγμα 1.

Εάν ο διανυσματικός χώρος V έχει μια βάση με n διανύσματα, αποδεικνύεται[2] ότι οποιαδήποτε βάση του V έχει επίσης n διανύσματα. Τότε λέμε ότι ο V έχει ***διάσταση*** n και γράφουμε

$$\dim V = n$$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι $\dim R^3 = 3$ και $\dim M_{2x3} = 6$. Γενικά,

$\dim R^n = n$ $\dim M_{mxn} = m \cdot n$

Πράγματι, η πιο οφθαλμοφανής βάση του R^n αποτελείται από τα n διανύσματα

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ e_n = (0,0,0,\dots,1)$$

όπου e_i είναι το διάνυσμα που έχει παντού 0 εκτός από την i-στή θέση όπου έχει 1. Η βάση αυτή του R^n λέγεται *κανονική*.

Επίσης, η πιο φανερή βάση του M_{mxn} αποτελείται από τους $m \cdot n$ πίνακες

$$e_{ij}, \quad \text{με } i \in \{1,2,\dots,m\},\ j \in \{1,2,\dots,n\}$$

όπου e_{ij} είναι ο πίνακας που έχει 1 στη θέση i,j ενώ σε κάθε άλλη θέση έχει 0. Η βάση αυτή του M_{mxn} λέγεται *κανονική*.

[2] η απόδειξη παραλείπεται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $V = P_3(x) = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$. Έχουμε δει ότι το V αποτελεί διανυσματικό χώρο. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$e_3(x) = x^3, \quad e_2(x) = x^2, \quad e_1(x) = x, \quad e_0(x) = 1$$

Θα δείξουμε ότι αποτελούν βάση του V:

(i) Τα πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\lambda_1\, e_3(x) + \lambda_2\, e_2(x) + \lambda_3\, e_1(x) + \lambda_4\, e_0(x) = \mathbf{0} \text{ [το μηδενικό πολυώνυμο]}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\, x^3 + \lambda_2\, x^2 + \lambda_3\, x + \lambda_4\, 1 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

(ii) Τα πολυώνυμα παράγουν το χώρο: Έστω $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in V$. Προφανώς το $p(x)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των 4 πολυωνύμων:

$$p(x) = a_3\, e_3(x) + a_2\, e_2(x) + a_1\, e_1(x) + a_0\, e_0(x)$$

Συνεπώς τα 4 πολυώνυμα αποτελούν βάση του $V = P_3(x)$ και άρα

$$\dim P_3(x) = 4$$

Γενικά,

$$\boxed{\dim P_n(x) = n + 1}$$

Η προφανής βάση του $P_n(x)$ που αποτελείται από τα n +1 πολυώνυμα

$$x^n, \ldots, x^2, x, 1$$

ονομάζεται *κανονική*.

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, για να διαπιστώσουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων αποτελεί βάση δείχνουμε δύο ιδιότητες: ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι παράγουν το χώρο. Η πρώτη ιδιότητα δείχνεται σχετικά εύκολα ενώ η δεύτερη πολλές φορές απαιτεί αρκετές πράξεις. Όταν γνωρίζουμε τη διάσταση του χώρου, το επόμενο θεώρημα μας επιτρέπει να περιοριστούμε μόνο στη μία από τις δύο ιδιότητες. Αναφέρεται χωρίς απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$. Τότε,

Α. Οποιαδήποτε *n+1* ή περισσότερα διανύσματα είναι πάντοτε γραμμικά εξαρτημένα.
Β. Οποιαδήποτε *n -1* ή λιγότερα διανύσματα δεν αρκούν για να παραγάγουν τον χώρο *V*
Γ. Εάν έχουμε *n* ακριβώς διανύσματα τότε αυτά αποτελούν βάση του *V* αρκεί να ισχύει μόνο ένα από τα παρακάτω:
- τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα
- τα διανύσματα παράγουν το χώρο

Δ. Οποιαδήποτε *k* γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, όπου $k \le n$ αποτελούν μέρος μιας βάσης του *V*, δηλαδή μπορούν να συμπληρωθούν σε μια βάση του *V*. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Τα διανύσματα $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (5,2,0)$, $u_3 = (-1,0,2)$ αποτελούν βάση του R^3. Εφόσον $\dim R^3 = 3$ αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(5,2,0) + \lambda_3(-1,0,2) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση (αν λύσουμε π.χ. με επαυξημένο πίνακα). Άρα τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3.

2) Τα πολυώνυμα $p_1(x) = x^2 + 1$, $p_2(x) = x - 1$ και $p_3(x) = 2x + 1$ αποτελούν βάση του $P_2(x)$. Εφόσον γνωρίζουμε ότι $\dim P_2(x)$=3, αρκεί να δείξουμε ότι τα τρία πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\lambda_1\, p_1(x) + \lambda_2\, p_2(x) + \lambda_3\, p_3(x) = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1\,(x^2+1) + \lambda_2\,(x-1) + \lambda_3\,(2x+1) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \lambda_1\, x^2 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)x + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα τα τρία πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του $P_2(x)$.

3.7 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΕΥΘΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

Έστω W_1 και W_2 δύο υποχώροι του διανυσματικού χώρου V. Έχουμε δει ότι η τομή τους $W_1 \cap W_2$ αποτελεί υποχώρο του V ενώ η ένωσή τους $W_1 \cup W_2$ τους όχι απαραίτητα. Ωστόσο, θα ορίσουμε έναν νέο υποχώρο του V ο οποίος θα περιέχει την ένωση αυτή.

Το ***άθροισμα*** των δύο υποχώρων $W_1 + W_2$ αποτελείται από όλα τα αθροίσματα $u + v$, όπου $u \in W_1$ και $v \in W_2$. Δηλαδή,

$$W_1 + W_2 = \{u + v \mid u \in W_1 \text{ και } v \in W_2\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το άθροισμα $W_1 + W_2$ δύο υποχώρων του διανυσματικού χώρου V αποτελεί επίσης διανυσματικό υποχώρο του V.

Απόδειξη: Θα δείξουμε τις τρεις ιδιότητες του διανυσματικού υποχώρου.

(i) Εφόσον $\mathbf{0} \in W_1$ και $\mathbf{0} \in W_2$, ισχύει $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$

(ii) Θα δείξουμε ότι το σύνολο $W_1 + W_2$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Έστω $u + v$ και $u' + v'$ δύο διανύσματά του, όπου u, $u' \in W_1$ και v, $v' \in W_2$. Εφόσον W_1 και W_2 είναι διανυσματικοί υποχώροι του V ισχύει $(u + u') \in W_1$ και $(v + v') \in W_2$. Άρα,

$$(u + v) + (u' + v') = (u + u') + (v + v') \in W_1 + W_2$$

(iii) Θα δείξουμε ότι το $W_1 + W_2$ είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό.
Έστω $\lambda \in R$ και $u + v \in W_1 + W_2$, όπου $u \in W_1$ και $v \in W_2$. Εφόσον W_1 και W_2 είναι διανυσματικοί υποχώροι του V ισχύει $\lambda u \in W_1$ και $\lambda v \in W_2$. Άρα,

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \in W_1 + W_2$$

Συνεπώς, το άθροισμα $W_1 + W_2$ είναι διανυσματικός υποχώρος του V. ■

Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο υποχώρος $W_1 + W_2$ περιέχει την ένωση $W_1 \cup W_2$ και μάλιστα είναι ο μικρότερος χώρος που περιέχει την ένωση αυτή.

Η επόμενη πρόταση συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ και $W_1 + W_2$ ενός διανυσματικού χώρου V. Αναφέρεται χωρίς απόδειξη.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω W_1 και W_2 δύο υποχώροι πεπερασμένης διάστασης του διανυσματικού χώρου V. Τότε ισχύει

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \qquad (*)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $V = M_{2\times 2}$ ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων. Θεωρούμε τους δύο υποχώρους

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in R \right\} \qquad \text{και} \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b \in R \right\}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in R \right\}$$

Πράγματι, κάθε στοιχείο του $W_1 + W_2$ έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b \\ b & b' \end{pmatrix} \qquad \text{όπου } a,b,a',b' \in R$$

και προφανώς ανήκει στο δεύτερο σύνολο.

Επίσης κάθε στοιχείο του δεύτερου συνόλου μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{όπου } a,b,c \in R$$

που προφανώς ανήκει στο $W_1 + W_2$.

Αρκετά πιο εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\}$$

Από τη μορφή των υποχώρων διαπιστώνουμε ότι

$$\dim W_1 = 2, \quad \dim W_2 = 2, \quad \dim(W_1 + W_2) = 3, \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 1$$

και οι διαστάσεις αυτές επαληθεύουν τη σχέση

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Προχωράμε ένα βήμα παραπέρα. Ο διανυσματικός χώρος V θα λέγεται ***ευθύ άθροισμα*** των υποχώρων του W_1 και W_2 εάν $V = W_1 + W_2$ και επιπλέον $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Τότε γράφουμε

$$V = W_1 \oplus W_2$$

Η σημασία του ευθέως αθροίσματος βρίσκεται στην επόμενη πρόταση

ΘΕΩΡΗΜΑ: $V = W_1 \oplus W_2$ αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $v = w_1 + w_2$, με $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$.

Απόδειξη: Έστω $V = W_1 \oplus W_2$. Προφανώς κάθε $v \in V$ μπορεί να γραφεί ως $v = w_1 + w_2$, με $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$. Θα δείξουμε ότι η ανάλυση αυτή είναι μοναδική. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει και δεύτερη ανάλυση $v = w_1' + w_2'$, με $w_1' \in W_1$ και $w_2' \in W_2$. Τότε

$$\begin{aligned} v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \quad &\Rightarrow \quad w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \\ &\Rightarrow \quad w_1 - w_1' = w_2' - w_2 = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \quad w_1 = w_1' \quad \text{και} \quad w_2 = w_2' \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $v = w_1 + w_2$, με $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$. Προφανώς $V = W_1 + W_2$. Μένει να δείξουμε ότι $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Έστω λοιπόν $v \in W_1 \cap W_2$. Τότε το v μπορεί να γραφεί ως εξής

$$v = v + \mathbf{0}, \text{ όπου } v \in W_1 \text{ και } \mathbf{0} \in W_2$$

όπως επίσης

$$v = \mathbf{0} + v, \text{ όπου } \mathbf{0} \in W_1 \text{ και } v \in W_2$$

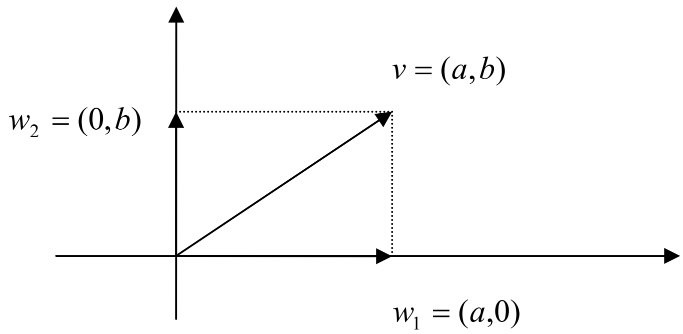
Εφόσον η ανάλυση αυτή είναι μοναδική ισχύει $v = \mathbf{0}$ και συνεπώς $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. ■

Προφανώς όταν $V = W_1 \oplus W_2$, η σχέση (∗) του πρώτου θεωρήματος δίνει

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα $v = (a,b)$ του επιπέδου R^2 αναλύεται ως άθροισμα των προβολών του v στους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και μάλιστα με μοναδικό τρόπο.



Πρόκειται για ένα παράδειγμα ευθέως αθροίσματος. Πράγματι, ο διανυσματικός χώρος

$$V = R^2 = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$$

είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων του

$$W_1 = \{(a, 0) \mid a \in R\} \text{ και } W_2 = \{(0, b) \mid b \in R\}$$

διότι $V = W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, όπου $\mathbf{0} = (0,0)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε διάνυσμα $v = (a, b)$ αναλύεται

$$v = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

όπου $w_1 = (a, 0) \in W_1$, $w_2 = (0, b) \in W_2$ και η ανάλυση αυτή είναι μοναδική.