Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Αριθμοί

Φυσικοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ακέραιοι $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Ρητοί $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \mid \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \nu \neq 0 \right\}$

Πραγματικοί $\mathbb{R}$

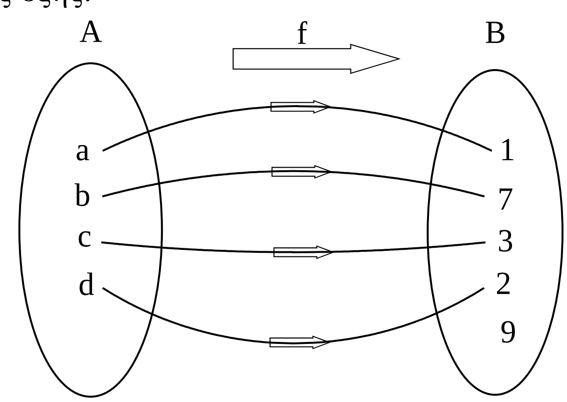
Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$

$[\alpha, \beta] :: \alpha \leq x \leq \beta$	$(\alpha, \beta) :: \alpha < x < \beta$
$[\alpha, \beta) :: \alpha \leq x < \beta$	$(\alpha, \beta] :: \alpha < x \leq \beta$
$[\alpha, +\infty) :: x \geq \alpha$	$(\alpha, +\infty) :: x > \alpha$
$(-\infty, \alpha] :: x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha) :: x < \alpha$

Συνάρτηση

Κάθε διαδικασία αντιστοίχησης η οποία αντιστοιχεί σε *κάθε* στοιχείο του συνόλου A *ένα μόνο* στοιχείο του B λέγεται *συνάρτηση*.

Σχηματικά η κατάσταση έχει ως εξής.



Συντομογραφία Συνάρτησης

Έστω λοιπόν ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και μία συνάρτηση f η οποία απεικονίζει το σύνολο A σε ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$f : A \to B$$

Το σύνολο A λέγεται <u>πεδίο</u> <u>ορισμού</u> και το B <u>σύνολο</u> <u>τιμών</u> της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $B = f(A)$.

Παραδείγματα:

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{x-1} + |1 - 2x|$$

$$f(x) = \eta\mu^3 x + \varepsilon\phi x$$

Τιμές Συνάρτησης

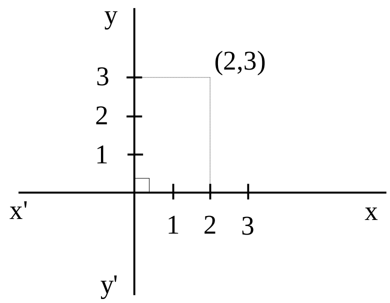
Θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$. Για να βρούμε τις τιμές μίας συνάρτησης αντικαθιστούμε στον τύπο της την δοσμένη τιμή.

π.χ Αν $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ τότε

$$f(1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 = 0$$
$$f(3) = 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1 = 10$$
$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6$$
$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}^2 - 3\sqrt{2} + 1 = 5 - 3\sqrt{2}$$

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

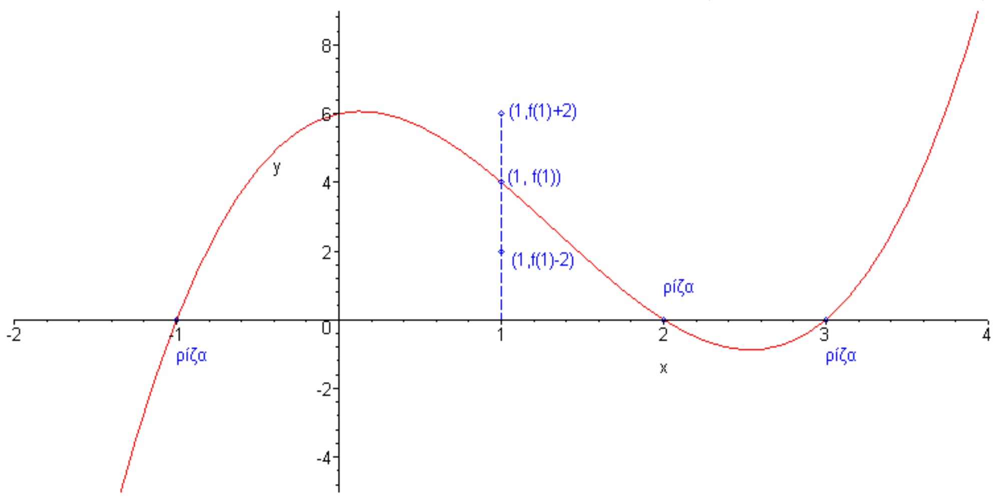
Θεωρούμε δύο ευθείες ($x'x$ και $y'y$) κάθετες μεταξύ τους και αριθμημένες με ίσα διαστήματα (ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων).



Κάθε σημείο του επιπέδου προβάλλεται στους δύο άξονες σε δύο συντεταγμένες.
Να μην γίνει σύγχυση στο συμβολισμό του σημείου $A(2,3)$ και του ανοικτού διαστήματος $x \in (2,3)$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

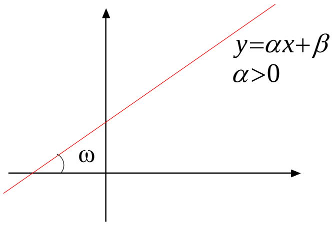
Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες $(x, f(x))$.
Δηλαδή από τα σημεία του επιπέδου, τα «καλά» είναι τα $C_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.

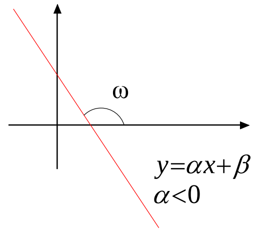


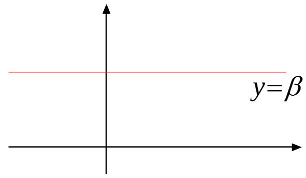
Κεφάλαιο 2 Η συνάρτηση της ευθείας

Το γράφημα της ευθείας

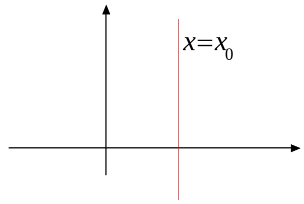
Πιθανές γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης της ευθείας είναι:







Ενώ η παρακάτω ευθεία δεν είναι γράφημα της συνάρτησης της ευθείας, μάλιστα δεν είναι καν συνάρτηση.



Κατασκευή γραφική παράστασης.

«Κάθε ευθεία ορίζεται πλήρως από 2 σημεία της»

<u>Παράδειγμα:</u>

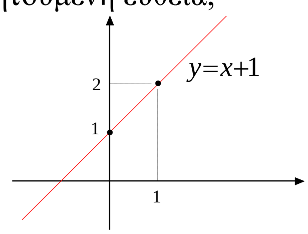
Σχεδιάστε την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$.

<u>Λύση:</u>

Δίνουμε 2 αυθαίρετες τιμές στο x και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές του y από τον τύπο της ευθείας.

x	0	1
y	*1*	*2*

Έπειτα βρίσκουμε στο επίπεδο τα σημεία αυτά, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση τα σημεία $(0,1)$ και $(1,2)$, τα ενώνουμε, προεκτείνουμε και βρήκαμε την ζητούμενη ευθεία,



<u>Παράδειγμα:</u>

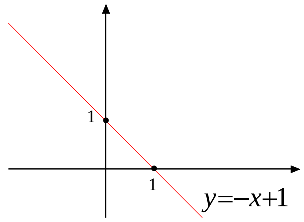
Σχεδιάστε την ευθεία εξίσωση με $y = -x + 1$.

<u>Λύση:</u>

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα πριν φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών

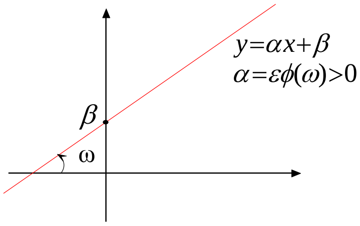
x	0	1
y	*1*	*0*

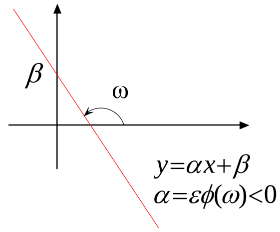
Βρίσκουμε στο επίπεδο τα σημεία $(0,1)$ και $(1,0)$, σχεδιάζουμε την ευθεία

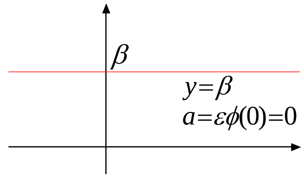


Οι συντελεστές της συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα χαρακτηρίσουμε τους συντελεστές α, β της $y = \alpha x + \beta$.







Τα παραπάνω γραφήματα υποδεικνύουν ότι η παράμετρος α -ως συντελεστής του x- ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που η ευθεία σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα. Είναι δηλαδή ένας δείκτης της κλίσης της ευθείας. Αν $\alpha > 0$ η ευθεία είναι αύξουσα, αν $\alpha = 0$ η ευθεία είναι σταθερή και αν $\alpha < 0$ η ευθεία είναι φθίνουσα.

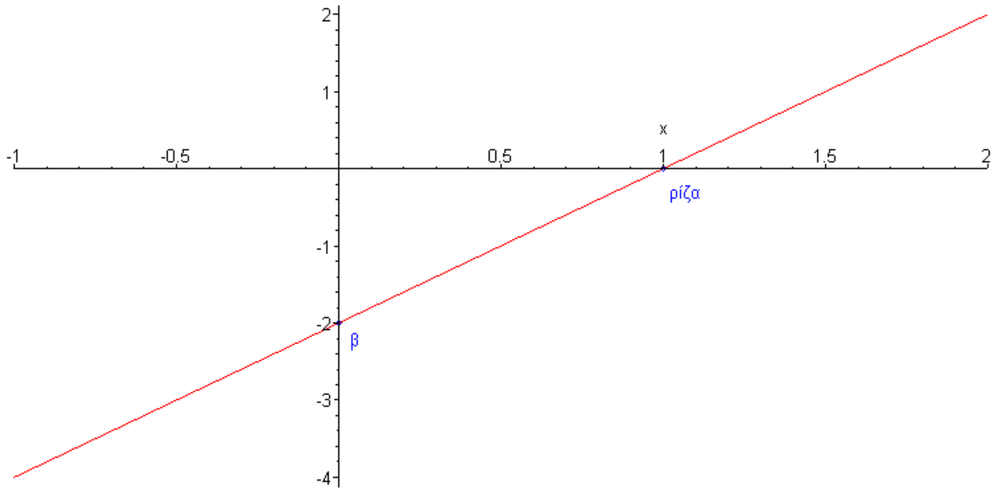
Επίσης από τα γραφήματα βλέπουμε ότι η παράμετρος β είναι το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$.

Οι ρίζες της συνάρτησης

«Ρίζα συνάρτησης $f(x)$ είναι κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$»

Ειδικότερα, ρίζα της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta = 0$

Στο παρακάτω γράφημα μπορούμε να δούμε μία ευθεία και την ρίζα της.



Κεφάλαιο 4 Η συνάρτηση της παραβολής

Τριώνυμο

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ονομάζεται τριώνυμο και είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού.

Διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι ο αριθμός $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Ρίζες του τριωνύμου

Για την λύση της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ χρησιμοποιούμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες:

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \qquad \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει μία «διπλή» πραγματική ρίζα:

$$\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Παραγοντοποίηση του τριωνύμου

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου εξαρτάται από τη διακρίνουσα και τις ρίζες της, συγκεκριμένα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 και παραγοντοποιείται ως εξής:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x - \rho_1\right)\left(x - \rho_2\right)$$

Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει μία «διπλή» πραγματική ρίζα ρ και παραγοντοποιείται ως εξής:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x - \rho\right)^2$$

Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Μαθηματικές έννοιες

Συναρτήσεις (functions)

Μία συνάρτηση εκφράζει μία μαθηματική σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών. Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι είναι ένας μηχανισμός εισόδου-εξόδου σύμφωνα με τον οποίο, ένα σύνολο δεδομένων τοποθετούνται σε έναν μαθηματικό τύπο έτσι ώστε αυτά να μετατρέπονται σε αποτέλεσμα.

Με μαθηματικούς όρους μια συνάρτηση εκφράζεται ως y=f(x) (συνάρτηση μίας μεταβλητής) ή ως z=f(x,y) (συνάρτηση δύο μεταβλητών), κλπ.

Οι συναρτήσεις μιας μεταβλητής θα μπορούσαν να διακριθούν περαιτέρω σε κατηγορίες με βάση κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό τους. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις:

- Σταθερές συναρτήσεις π.χ. y = k
- Γραμμικές (πρωτοβάθμιες) συναρτήσεις π.χ. y = ax + c
- Τετραγωνικές (δευτεροβάθμιες) συναρτήσεις – Παραβολές
  π.χ. $y = ax^2 + bx + c$
  Κυβικές (τριτοβάθμιες) συναρτήσεις π.χ. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Πολυωνιμικές συναρτήσεις (πολυώνυμα) π.χ. $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Πέραν αυτών των κατηγοριών διακρίνουμε και άλλες κατηγορίες συναρτήσεων ανάλογα με την μορφή τους (π.χ. εκθετικές ($y=a^x$), εκθετικές με βάση το e, λογαριθμικές κλπ).

Ορισμοί

Πεδίο ορισμού (domain) μίας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των τιμών της μεταβλητής x.
Πεδίο τιμών (ragne) μίας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των τιμών της μεταβλητής y.
Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή (independent variable)**, ενώ η μεταβλητή y ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή (dependent variable)**

Γραμμική συνάρτηση

Γενικά μια γραμμική συνάρτηση έχει την μορφή

y=f(x)= ax + b

Γεωμετρικά η παράμετρος b εκφράζει την θέση της ευθείας στο επίπεδο ενώ η παράμετρος a την κλίση της ευθείας σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα Ox (συγκεκριμένα εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζεται από τον άξονα Ox και την ευθεία).

- Αν γνωρίζουμε δυο σημεία της ευθείας (x_1,y_1) και (x_2,y_2) τότε για να υπολογίσουμε την εξίσωση θα πρέπει να βρούμε πρώτα την κλίση της ευθείας $a=(y_2-y_1) / (x_2-x_1)$ και μετά να την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $a = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ή $a = \dfrac{y - y_2}{x - x_2}$.
- Εάν γνωρίζουμε την κλίση a και ένα σημείο της ευθείας (x_1,y_1) τότε μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας εξισώνοντας την κλίση της ευθείας a με την κλίση σε οποιαδήποτε άλλο σημείο της ευθείας (x,y), δηλαδή:

  $a=(y-y_1) / (x-x_1)$ (y συμβολίζει εξαρτημένη μεταβλητή και x συμβολίζει ανεξάρτητη μεταβλητή)

Αριθμητικό παράδειγμα:

Από τα καθημερινά στοιχεία ενός σουπερμάρκετ προκύπτει ότι η ποσότητα που πωλείται (ανεξάρτητη μεταβλητή) για συγκεκριμένα είδη κρέατος μεταβάλλεται αντίστροφα της τιμής πώλησης (εξαρτημένη μεταβλητή) ανά κιλό ως εξής:

Τιμή (P)/κιλό Κρέατος	6.0	5.75	5.5	5.25	5.00	4.75	4.50	4.25	4.00	3.75	3.50
Ημερήσια ποσότητα πώλησης (Q) σε κιλά	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Η συνάρτηση που εκφράζει την σχέση μεταξύ ημερήσιας πώλησης και τιμής είναι η

P=7-0,25*Q

Πεδίο ορισμού της εν λόγω συνάρτησης είναι το σύνολο των τιμών που είναι δυνατόν να λαμβάνει η ανεξάρτητη μεταβλητή δηλ. η τιμή κρέατος ανά κιλό και πεδίο τιμών είναι το σύνολο των τιμών που είναι δυνατόν να λάβει η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλ. η ποσότητα κρέατος που πωλείται. Τα πεδία τιμών και ορισμού υπολογίζονται από τις υποθέσεις ή εάν θέλετε τις παραδοχές που κάνουμε. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, κατ' αρχήν το P και το Q είναι θετικά. Δεν έχει νόημα να πούμε τιμή κρέατος -1 ευρώ ή σήμερα πωλήθηκαν -2 κιλά κρέατος. Τώρα από την σχέση P=7-0,25*Q προκύπτει ότι το P παίρνει την μεγαλύτερη τιμή του όταν Q=0. Ομοίως από την σχέση P=7-0,25*Q ¨έχουμε ότι Q=28- 4*P και συνεπώς το Q παίρνει την μεγαλύτερη τιμή του όταν το P=0 η οποία τιμή του είναι το 28. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα[0, 28] και το πεδίο τιμών είναι το [0,7].

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση της ζήτησης του παραπάνω παραδείγματος θεωρώντας α) την τιμή πώλησης ως ανεξάρτητη μεταβλητή και β) την ποσότητα πώλησης ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Λύση
Παρατηρώ ότι υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Άρα η συνάρτηση έχει την μορφή y=ax+b

α) τιμή πώλησης ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Γνωρίζω τουλάχιστον δύο σημεία της ευθείας. Άρα μπορώ να υπολογίσω την κλήση

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{5.75-6.0} = -\frac{1}{0,25} = -4.0$$

Τώρα έχουμε την σχέση $a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ και συνεπώς -4.0 = $\frac{y-5}{x-5.75}$ απ' όπου προκύπτει y=28-4*x

β) η ποσότητα πώλησης σαν ανεξάρτητη μεταβλητή.

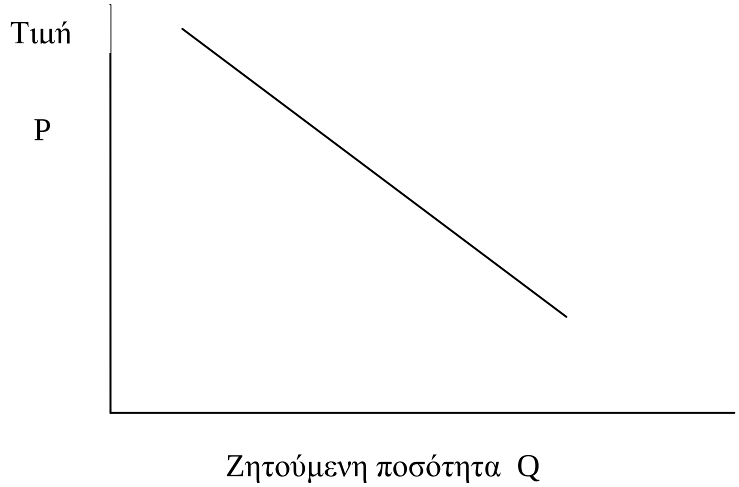
$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5.75-6.0}{5-4} = -\frac{0.25}{1} = -0.25$$

Τώρα έχουμε την σχέση $a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ και συνεπώς -0.25 = $\frac{y-5.75}{x-5}$ απ' όπου προκύπτει y=7-0.25*x

Οικονομικές Εφαρμογές

Συνάρτηση της ζήτησης
Η ζήτηση ενός προϊόντος εξαρτάται από την τιμή του. Δηλαδή Q_d= f(P). Η οικονομική θεωρία προχωρά ακόμα παραπέρα δηλώνοντας ότι η ζήτηση ενός προϊόντος εξαρτάται εκτός από την τιμή μου και από άλλους παράγοντες όπως οι τιμές των υποκατάστατων και συμπληρωματικών αγαθών, το εισόδημα, την διαφήμιση κλπ. Δηλαδή, Q_d= f(P, P_c, Y, A, ….), όπου P = η τιμή του προϊόντος, P_c = οι τιμές των υποκατάστατων και συμπληρωματικών αγαθών, Y = το εισόδημα, A= η διαφήμιση.

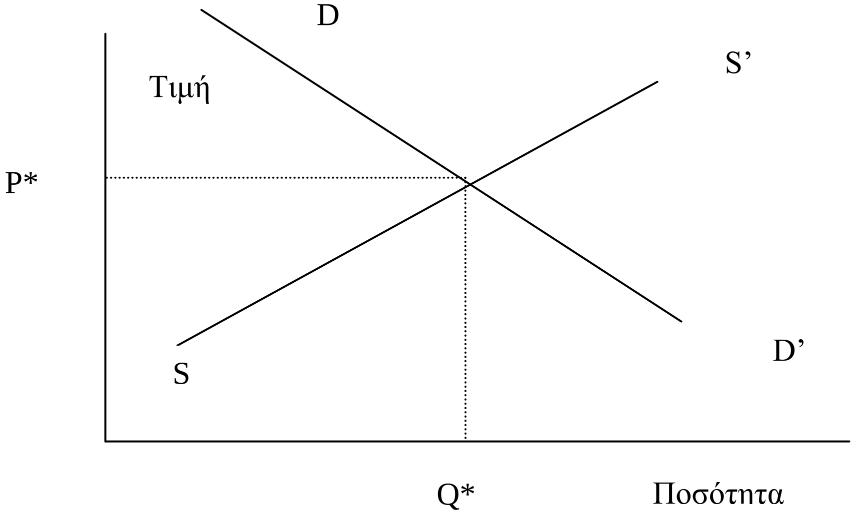
Η συνάρτηση της ζήτησης είναι μία μαθηματική σχέση που παρουσιάζει πως η ζητούμενη ποσότητα ενός προϊόντος ή υπηρεσίας αντιδρά στις μεταβολές των παραγόντων αυτών. Στην πιο απλή της μορφή η συνάρτηση της ζήτησης είναι μια γραμμική φθίνουσα συνάρτηση της τιμής της, ήτοι Q_d=a-bP ή P=x-yQ.



Συνάρτηση της προσφοράς

Η συνάρτηση της προσφοράς είναι μία μαθηματική σχέση που παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο η προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού ή υπηρεσίας αντιδρά στις μεταβολές των παραγόντων που επηρεάζουν την προσφορά.
Η οικονομική θεωρία μας λέει ότι η προσφορά για ένα συγκεκριμένο προϊόν εξαρτάται από την τιμή του, δηλαδή Q_s=f(P) ή ακόμη και από άλλους παράγοντες όπως για παράδειγμα οι τιμές άλλων σχετικών αγαθών, ο καιρός κλπ. δηλαδή
Q_s=f(P, P_x, W, …) Στην απλούστερη περίπτωση θεωρούμε την συνάρτηση της προσφοράς ως συνάρτηση μόνο της τιμής, δηλαδή Q_s=f(P). Είναι γενικά παραδεκτό ότι η συνάρτηση της προσφοράς είναι αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή ότι μεγαλύτερες τιμές απολαμβάνει ο προμηθευτής τόσο πιο πολύ αυξάνει την ποσότητα των προϊόντων του που φέρνει στην αγορά προς κατανάλωση.

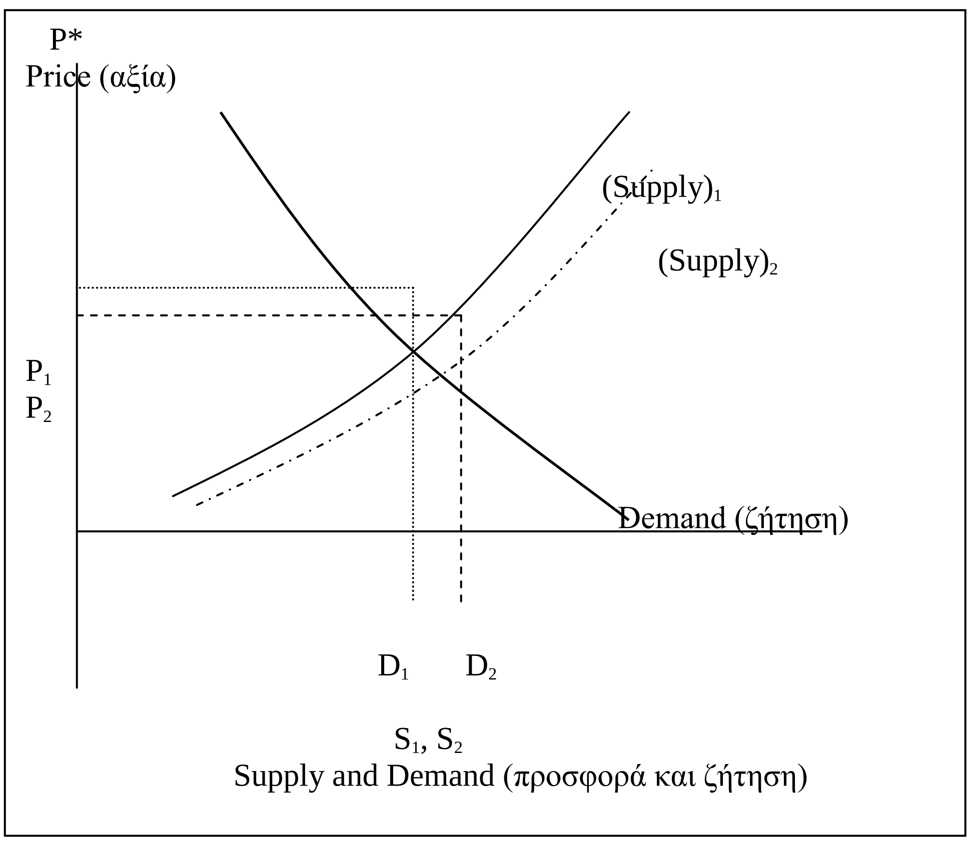
Ισορροπία της αγοράς
Σε συνθήκες καθαρά ελεύθερου ανταγωνισμού, υπάρχει μία σχέση μεταξύ της αξίας ενός προϊόντος που ο αγοραστής επιθυμεί να πληρώσει και της ποσότητας του προϊόντος που αγοράζει. Υπάρχει περίπου μία ίδια σχέση μεταξύ της αξίας πώλησης του προϊόντος και της ποσότητας του προϊόντος που υπάρχει διαθέσιμο στην αγορά για πώληση. Εάν η αξία είναι μεγάλη οι προμηθευτές για να κερδίσουν περισσότερα αυξάνουν την ποσότητα του προϊόντος στην αγορά. Από την άλλη πλευρά εάν η αξία που παίρνουν πουλώντας ένα προϊόν στην αγορά είναι πολύ μικρή προσπαθούν να μην φέρουν στην αγορά περισσότερες μονάδες του εν λόγω προϊόντος γιατί ενδεχομένως δεν τους συμφέρει. Μάλιστα ορισμένοι μπορεί να σταματήσουν εντελώς την παραγωγή του προϊόντος και να στραφούν σε άλλα πιο επικερδή προϊόντα.
Συνδυάζοντας στην ίδια γραφική παράσταση τα διαγράμματα προσφοράς και ζήτησης έχουμε:



Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει το βασικό οικονομικό αξίωμα της *προσφοράς και ζήτησης,* το οποίο δηλώνει ότι σε συνθήκες ελεύθερου ανταγωνισμού η αξία ενός προϊόντος που θα προσφέρεται για αγορά και θα αγοράζεται από το κοινό είναι η αξία για την οποία η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση.

Επειδή πολλές οικονομικές μελέτες αφορούν επενδύσεις οι οποίες στοχεύουν στην αύξηση της ποσότητας παραγωγής ενός προϊόντος και συνεπώς την αύξηση της ποσότητας του εν λόγω προϊόντος στην αγορά, ενδιαφερόμαστε να δούμε τι επιπτώσεις θα έχει μια τέτοια ενέργεια στην τιμή πώλησης του εν λόγω προϊόντος.

Εάν ο προμηθευτής στοχεύει να προμηθεύσει την αγορά με μεγαλύτερες ποσότητες κάποιου προϊόντος με την επικρατούσα τιμή πώλησης, υποθέτει ότι έχουν δημιουργηθεί νέες συνθήκες αξίας και προσφοράς. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για μία αρχική P_1 εάν έλθει στην αγορά μία επιπρόσθετη μονάδα του εν λόγω προϊόντος δημιουργεί μία νέα σχέση αξίας-προσφοράς. Επειδή δεν έχει επέλθει αλλαγή στην σχέση αξίας-ζήτησης η τομή των δύο καμπυλών δείχνει χαμηλότερη τιμή P_2 του προϊόντος η οποία αντιστοιχεί και σε νέα τιμή για τη ζήτηση. Προφανώς, το αντίστροφο θα συμβεί από την ελάττωση της προσφοράς της ποσότητας του προϊόντος στην αγορά.



Ορισμοί Οικονομικών μεγεθών

Τα **συνολικά έσοδα** (total revenue, TR) μπορούν να περιγραφούν σαν συνάρτηση των μονάδων πώλησης. TR(Q)=P*Q όπου P είναι η τιμή πώλησης μιας μονάδας προϊόντος και Q οι συνολικές μονάδες που πωλούνται.

Π.χ. εάν P=500-0,02Q, τότε $TR=PQ=(500-0{,}02Q)Q=500Q-0{,}02Q^2$

Μέσα έσοδα

$AR = TR/Q = (500Q-0{,}02Q^2)/Q= 500-0{,}02Q$

Το **συνολικό κόστος** (total cost, TC) παραγωγής μπορεί να περιγραφεί σαν συνάρτηση των μονάδων παραγωγής (Q) ήτοι : TC =f(Q). Συνήθως το κόστος παραγωγής δίνεται σαν άθροισμα του σταθερού κόστους παραγωγής (ανεξάρτητου από πόσες μονάδες παράγονται) και του σταθερού κόστους παραγωγής (ανάλογου των μονάδων που παράγονται, TC(Q)=FC+VC)

Το **κέρδος** (profit) μπορεί να περιγραφεί σαν συνάρτηση των μονάδων παραγωγής (Θεωρούμε ότι οι μονάδες προϊόντος που παράγονται είναι ίδιες με αυτές που πωλούνται) και ισούται με την διαφορά των συνολικών εσόδων και συνολικού κόστους, ήτοι Π(Q)=TR(Q)-TC(Q)