Βάση και Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος F.

Ορισμός : Ένα υποσύνολο S του διανυσματικού χώρου V θα λέμε ότι είναι **βάση** του V αν ισχύει
A) Η θήκη του S παράγει το διανυσματικό χώρο V, δηλαδή

$$[S] = V$$

B) Το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, δηλαδή τα διανύσματα που περιέχει είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο ονομάζεται βάση όταν είναι ένα σύνολο με (i) τον ελάχιστο δυνατό αριθμό διανυσμάτων που τον παράγουν και με (ii) τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων.

Επομένως μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα σύνολο γεννητόρων είναι βάση αν και μόνο αν ισχύει η (i) ή ισοδύναμα αν και μόνο αν ισχύει η (ii).

Παράδειγμα Έχουμε το χώρο $\mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα που τον παράγουν είναι τα

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1).$$

Όμως τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Τη βάση αυτή την ονομάζουμε συνήθη ή κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Στη συνέχεια θα περιορισθούμε σε διανυσματικούς χώρους που έχουν βάσεις πεπερασμένα σύνολα.

Παρατηρήσεις

1. Τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου V αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, δηλαδή

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, \tag{1}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

2. Οι συντελεστές $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με i=1,…,n που ορίζονται από τη (1) ονομάζονται συνιστώσες ή συντεταγμένες του διανύσματος v ως προς τη βάση των $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$. Επομένως οι συντεταγμένες ενός διανύσματος αναφέρονται πάντα ως προς μια διατεταγμένη βάση.

3. Κάθε διανυσματικός χώρος $V \neq \varnothing$ που περιέχει ένα σύνολο S που τον παράγει, έχει και μια βάση. Κάθε άλλη βάση του V θα έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με την βάση αυτή.

4. Ο αριθμός των στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάσης ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται διάσταση του V, είναι σταθερός και συμβολίζεται με dim V.

5. Αν dim V=n και τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ ικανοποιούν τη σχέση Α) του ορισμού τότε τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ είναι μια βάση του V.

6. Αν dim V=n και τα διανύσματα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ ικανοποιούν τη σχέση Β) του ορισμού τότε τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ είναι μια βάση του V.

7. Αν τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ παράγουν τον V τότε κάποια από αυτά αποτελούν βάση του V. Η εύρεση των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων γίνεται με τη βοήθεια της μεθόδου της κλιμακοποίησης.

8. Αν τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V και dim V =n με k<n τότε υπάρχουν διανύσματα $v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3}, ..., v_n$ τέτοια ώστε τα $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ να αποτελούν βάση του χώρου V.

Σύμφωνα με την πρώτη παρατήρηση για τον χώρο $\mathbb{R}^3$ από το παράδειγμα έχουμε ότι ένα τυχαίο σημείο x μπορεί να γραφεί ως προς τη συνήθη βάση

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 .$$

Οι 5, 6 παρατηρήσεις αφορούν διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης. Ενώ η παρατήρηση 8 δίδει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα (Θεώρημα επέκτασης βάσης) Σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης κάθε σύνολο πεπερασμένης διάστασης μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει βάση του χώρου.

Επίσης έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα Έστω ένας διανυσματικός χώρος V με dim V=n τότε κάθε πλήθος n+k, με $k \geq 1$ διανυσμάτων του V τα διανύσματα θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Ορισμός Κάθε διανυσματικός χώρος V που έχει dim V=$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ονομάζεται διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Διαφορετικά θα ονομάζεται απειροδιάστατος ή άπειρης διάστασης.

Παράδειγμα Διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι οι $\mathbb{R}^n, \Pi_n, \mathbb{C}$, όπου Π_n είναι ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων.

Θεώρημα Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V_1, V_2 υπόχωροι του. Τότε για τις διαστάσεις των υποχώρων αυτών ισχύει

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \qquad (1)$$

Άσκηση 1 Να βρεθεί μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$ που να περιέχει τα διανύσματα $a = (-1,1,0,0), b = (0,0,2,1)$.

Λύση Αρχικά γνωρίζουμε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^4$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Σύμφωνα με το θεώρημα επέκτασης βάσης αρκεί να βρούμε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε μαζί με τα διανύσματα a, b να δημιουργούν μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$.

Δανειζόμαστε ένα από τα διανύσματα της συνήθης βάσης, έστω το $e_1 = (1,0,0,0)$. Θα εξετάσουμε αν τα a, b, e_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 e_1 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,1) + \lambda_3(1,0,0,0) = 0 \Rightarrow$$
$$(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2, \lambda_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 .$$

Επειδή ο χώρος είναι διάστασης 4 δανειζόμαστε άλλο ένα διάνυσμα από τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^4$ για να εξετάσουμε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,1) + \lambda_3(1,0,0,0) + \lambda_4(0,1,0,0) = 0 \Rightarrow$$
$$(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_4, 2\lambda_2, \lambda_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_3 = \lambda_1$$
$$\lambda_4 = -\lambda_1.$$

Επομένως το σύστημα έχει άπειρες μη μηδενικές λύσεις και συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Όμως αν επιλέξουμε το διάνυσμα $e_4 = (0,0,0,1)$ τότε έχουμε

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_4 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,1) + \lambda_3(1,0,0,0) + \lambda_4(0,0,0,1) = 0 \Rightarrow$$
$$(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_4) = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Άρα μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$ που να περιέχει τα διανύσματα $a = (-1,1,0,0), b = (0,0,2,1)$ είναι η

$$\{(-1,1,0,0),(0,0,2,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$$

με dim $\mathbb{R}^4$=4.

Άσκηση 2 Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $x = (2,1,-3), y = (3,2,-3), z = (1,-1,1)$ αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Λύση Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1(2,1,-3) + \lambda_2(3,2,-3) + \lambda_3(1,-1,1) = 0 \Rightarrow$$
$$(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3) = 0 \Rightarrow$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$
$$-3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Συνεπώς $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Άρα τα διανύσματα αποτελούν βάση του χώρου.

Μεθοδολογία εύρεσης βάσης υποχώρου

Αν ο διανυσματικός υπόχωρος δίδεται από σχέσεις που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων του τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα

1. Λύνουμε τις σχέσεις ως προς τυχαίες συντεταγμένες (ελεύθεροι άγνωστοι) .
2. Κάνουμε αντικατάσταση σε ένα τυχαίο διάνυσμα του υπόχωρου αυτού.
3. Επειδή κάθε διάνυσμα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των σταθερών διανυσμάτων με συντελεστές τους ελεύθερους άγνωστους η βάση θα αποτελείται από τα σταθερά διανύσματα.

Άσκηση 3 Έστω $V_1 = \{(x,y,z): x+y+z=0\}$. Να ευρεθεί μια βάση του.

Λύση Αρχικά λύνουμε την σχέση ως προς μια τυχαία συντεταγμένη

$$x = -y-z.$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο του V_1 ικανοποιεί τη σχέση επομένως για τυχαίο σημείο v έχουμε

$$v = (x,y,z) = (-y-z,y,z)$$
$$= y(-1,1,0) + z(-1,0,1).$$

Προφανώς το τυχαίο σημείο v μπορεί να γράφεται κατά μοναδικό τρόπο συναρτήσει των διανυσμάτων

$$v_1 = (-1,1,0), v_2 = (-1,0,1).$$

Τα διανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν υπάρχει t τέτοιο ώστε $v_2 = tv_1$) και άρα αποτελούν βάση του V_1.

Άσκηση 4 Έστω $V_1 = \{(x,y,z): x+y+z=0\}$, $V_2 = \{(x,y,z): x-y=0\}$. Να ευρεθούν οι βάσεις και οι διαστάσεις των V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$.

Λύση Από την προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι βάση του V_1 είναι η

$$\{v_1, v_2\}$$

οπότε dim V_1=2 . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την βάση V_2 έχουμε

$$x = y.$$

Επομένως

$$v = (x,y,z) = (y,y,z)$$
$$= y(1,1,0) + z(0,0,1).$$

Τα διανύσματα $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως βάση του V_2 είναι $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ με dim V_2=2.

Α τρόπος

Για τον υπολογισμό της βάσης του $V_1 \cap V_2$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x &= -y - z \\ x &= y \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} x &= y \\ z &= -2y. \end{aligned}$$

Επομένως ένα τυχαίο διάνυσμα του $V_1 \cap V_2$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) = (y, y, -2y) \\ &= y(1,1,-2). \end{aligned}$$

Άρα dim $V_1 \cap V_2 = 1$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3 .$$

Β τρόπος

Για τον υπολογισμό της βάσης του $V_1 + V_2$ αρκεί να βρούμε το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τους. Προφανώς η θήκη του χώρου θα είναι

$$V_1 + V_2 = \left[(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\right].$$

Τα διανύσματα $(-1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_1(-1,1,0) + \lambda_2(-1,0,1) + \lambda_3(0,0,1) = 0 \Rightarrow \\ (-\lambda_1, \lambda_1, 0) + (-\lambda_2, 0, \lambda_2) + (0, 0, \lambda_3) = 0 \Rightarrow \\ (-\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Συνεπώς $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Επειδή ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι πεπερασμένης διάστασης και dim $V_1 + V_2 = 3$ από τη σχέση (1) έχουμε

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 3 = 1 .$$