ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΙΝΑΚΕΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον ορισμό και τις στοιχειώδεις ιδιότητες των πινάκων, που είναι ορθογώνιες παρατάξεις αριθμών ή άλλων στοιχείων. Οι πίνακες εμφανίζονται στη θεωρία των γραμμικών συστημάτων, στη θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων και σήμερα πλέον χρησιμοποιούνται σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Θα ορίσουμε τις πράξεις μεταξύ των πινάκων και θα μελετήσουμε τις ιδιότητές τους.

Οι πίνακες που θα θεωρήσουμε στη συνέχεια έχουν στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς. Όταν αναφερόμαστε στο σώμα Κ, εννοούμε ότι $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathrm{K} = \mathbb{C}$.

2.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 2.1.1 *Μία ορθογώνια παράταξη* $\mu\nu$ *στοιχείων από το σώμα* K *σε* μ *οριζόντιες σειρές, που λέγονται* ***γραμμές****, και σε* ν *κατακόρυφες σειρές, που λέγονται* ***στήλες****, της μορφής*

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\nu} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & . & . & . & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

λέγεται ***πίνακας τύπου*** $\mu \times \nu$**.** *Συνήθως συμβολίζεται με ένα από τα κεφαλαία γράμματα ή με το γενικό στοιχείο* α_{ij} *σε παρένθεση, δηλαδή γράφουμε* $\mathrm{A} = \left(\alpha_{ij}\right)_{\mu\times\nu}$ *ή* $\mathrm{A} = \left(\alpha_{ij}\right)$*, αν ο τύπος του πίνακα είναι γνωστός.*

Οι αριθμοί α_{ij} λέγονται **στοιχεία** του πίνακα A και οι δείκτες i και j δηλώνουν τη γραμμή και τη στήλη, αντίστοιχα, που ανήκει το στοιχείο α_{ij}. Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

είναι τύπου 2×3 και 2×2, αντίστοιχα, και έχουμε

$$\alpha_{11}=1, \alpha_{12}=2, \alpha_{23}=-5,\ \beta_{21}=4,\ \beta_{22}=5, \ldots \text{ κλπ.}$$

Όταν είναι $\mu=\nu$, τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός**. Ένας πίνακας τύπου $1\times\nu$ (αντ., $\mu\times 1$) λέγεται **πίνακας-γραμμή** (αντ., **πίνακας - στήλη**). Το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $\mu\times\nu$ με στοιχεία από το σώμα K συμβολίζεται με $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}(\mathrm{K})$ ή $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}$, αν το σώμα K θεωρείται γνωστό. Το σύνολο των $\nu\times\nu$ τετραγωνικών πινάκων συμβολίζεται με $\mathrm{M}_{\nu}(\mathrm{K})$ ή απλά M_{ν}.

Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ ορίζουν την **κύρια διαγώνιο** του τετραγωνικού πίνακα $\mathrm{A}=\left(\alpha_{ij}\right)_{\nu\times\nu}$.

Ο τετραγωνικός πίνακας $\mathrm{A}=\left(\alpha_{ij}\right)_{\nu\times\nu}$ λέγεται **τριγωνικός άνω**, αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή είναι $\alpha_{ij}=0$, για $i>j$. Ομοίως ο πίνακας $\mathrm{A}=\left(\alpha_{ij}\right)_{\nu\times\nu}$ λέγεται **τριγωνικός κάτω**, αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή ισχύει ότι $\alpha_{ij}=0$, για $i<j$.

Η σχέση της ισότητας στο σύνολο $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}(\mathrm{K})$, αν είναι $\mathrm{A}=\left(\alpha_{ij}\right)_{\mu\times\nu}$ και $\mathrm{B}=\left(\beta_{ij}\right)_{\mu\times\nu}$, ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \alpha_{ij}=\beta_{ij}, \text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,\mu,\ j=1,2,\ldots,\nu .$$

2.2 Πράξεις στο σύνολο των $\mu\times\nu$ πινάκων

Η πρόσθεση πινάκων

Ορισμός 2. 2. 1 *Στο σύνολο* $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}$ *των* $\mu\times\nu$ *πινάκων με στοιχεία στο σώμα* $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$ ***η πρόσθεση*** *είναι μία εσωτερική πράξη, που ορίζεται ως εξής:*

$$+ : \mathrm{M}_{\mu\times\nu}\times\mathrm{M}_{\mu\times\nu}\to\mathrm{M}_{\mu\times\nu}, (\mathrm{A},\mathrm{B})\to\mathrm{A}+\mathrm{B} := \left(a_{ij}+b_{ij}\right),$$

όπου $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ και $\mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)$. *Ο πίνακας* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *λέγεται* ***άθροισμα*** *των πινάκων* A, B *και κάθε του στοιχείο προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων* A *και* B.

Για παράδειγμα, αν είναι

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \text{ τότε } \mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{bmatrix}4 & 4 & 3\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 2.2.1 *Η πράξη της πρόσθεσης ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $A+B=B+A$, *για κάθε* $A,B\in M_{\mu\times\nu}$ ***(αντιμεταθετική ιδιότητα)***

(ii) $(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$, *για κάθε* $A,B,\Gamma\in M_{\mu\times\nu}$ ***(προσεταιριστική ιδιότητα)***

(iii) *Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση και είναι* ***ο μηδενικός*** *πίνακας* $O=(0)_{\mu\times\nu}$, *που όλα τα στοιχεία του είναι 0 . Ισχύει ότι*

$$A+O=O+A=A\text{, για κάθε } A\in M_{\mu\times\nu}.$$

(iv) *Για κάθε πίνακα* $A=\left(a_{ij}\right)$ *υπάρχει* ***ο αντίθετος*** *πίνακας* $-A=\left(-a_{ij}\right)$ *που είναι τέτοιος ώστε*

$$A+(-A)=(-A)+A=O.$$

Έτσι, το σύνολο $M_{\mu\times\nu}$ *γίνεται αβελιανή προσθετική ομάδα.*

Απόδειξη

(i) Σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης, αν είναι $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$, έχουμε

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\left(b_{ij}+a_{ij}\right)=B+A$$

(ii) Αν $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ και $\Gamma=\left(c_{ij}\right)$ είναι $\mu\times\nu$ πίνακες, τότε

$$(A+B)+\Gamma=\left((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right)=A+(B+\Gamma)$$

(iii) Αν $A=\left(a_{ij}\right)$ τότε: $O+A=A+O=\left(a_{ij}+0\right)=\left(a_{ij}\right)=A$

(iv) Αν $A=\left(a_{ij}\right)$ τότε: $A+(-A)=(-A)+A=\left((-a_{ij})+a_{ij}\right)=\left(0\right)=O$ □

- Η πράξη της **αφαίρεσης** στο σύνολο $M_{\mu\times\nu}$ ορίζεται μέσω της πρόσθεσης από την ισότητα
$$A-B:=A+(-B).$$
- Από τον ορισμό και τις ιδιότητες της πρόσθεσης εύκολα προκύπτει ότι το άθροισμα τριών ή περισσότερων πινάκων του ιδίου τύπου είναι το ίδιο με οποιαδήποτε σειρά και αν εκτελεστούν οι επιμέρους προσθέσεις. Για παράδειγμα, ισχύει
$$A+B+\Gamma+\Delta=(A+B)+(\Gamma+\Delta)=[(A+B)+\Gamma]+\Delta=\Delta+[B+(\Gamma+A)].$$
- Η εξίσωση πινάκων $A+X=B$ έχει μοναδική λύση $X=B-A$, αφού
$$\begin{aligned} A+X=B &\Leftrightarrow -A+(A+X)=(-A)+B \\ &\Leftrightarrow [(-A)+A]+X=B+(-A) \\ &\Leftrightarrow O+X=B-A \Leftrightarrow X=B-A. \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ορισμός 2. 2. 2 *Στο σύνολο* $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}$ *των* $\mu\times\nu$ *πινάκων με στοιχεία στο σώμα* $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$ ***ο πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα*** *είναι μία εξωτερική πράξη με συντελεστές στο σώμα* K, *που, αν* $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ *και* $\lambda\in\mathrm{K}$, *ορίζεται ως εξής:*

$$\lambda\cdot\mathrm{A}=\left(\lambda a_{ij}\right)$$

Συνήθως γράφουμε $\lambda\mathrm{A}$ *, αντί του τυπικού συμβόλου* $\lambda\cdot\mathrm{A}$.

Για παράδειγμα, αν είναι $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix}$, τότε $4\cdot\mathrm{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -8\\ 12 & -4 & -12\end{bmatrix}$.

Θεώρημα 2. 2. 2 Για κάθε $\lambda,\mu\in\mathrm{K}$ και $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right),\mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)\in\mathrm{M}_{\mu\times\nu}(\mathrm{K})$ ισχύουν:

(i) $\lambda\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\lambda\cdot\mathrm{A}+\lambda\cdot\mathrm{B}$,

(ii) $(\lambda+\mu)\cdot\mathrm{A}=\lambda\cdot\mathrm{A}+\mu\cdot\mathrm{A}$,

(iii) $\lambda\cdot(\mu\cdot\mathrm{A})=(\lambda\mu)\cdot\mathrm{A}$,

(iv) $1\cdot\mathrm{A}=\mathrm{A}$, όπου 1 είναι η μονάδα των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη

(i) $\lambda\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\left(\lambda(a_{ij}+b_{ij})\right)=\left(\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right)+\left(\lambda b_{ij}\right)=\lambda\cdot\mathrm{A}+\lambda\cdot\mathrm{B}$.

(ii) $(\lambda+\mu)\cdot\mathrm{A}=\left((\lambda+\mu)a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right)+\left(\mu a_{ij}\right)=\lambda\cdot\mathrm{A}+\mu\cdot\mathrm{A}$.

(iii) $\lambda\cdot(\mu\cdot\mathrm{A})=\lambda\cdot\left(\mu a_{ij}\right)=\left(\lambda(\mu a_{ij})\right)=\left((\lambda\mu)a_{ij}\right)=(\lambda\mu)\cdot\mathrm{A}$.

(iv) $1\cdot\mathrm{A}=\left(1a_{ij}\right)=\left(a_{ij}\right)=\mathrm{A}$. □

Παρατήρηση

Το σύνολο $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}(\mathrm{K})$ *εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα, όπως θα μάθουμε στο κεφάλαιο 8, αποκτά τη δομή* ***διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα*** K .

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων δεν είναι εσωτερική πράξη στο σύνολο $\mathrm{M}_{\mu\times\nu}(\mathrm{K})$, είναι όμως εσωτερική πράξη στο σύνολο $\mathrm{M}_{\nu}(\mathrm{K})$. Η αφετηρία του ορισμού του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι η θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων που θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 9. Θα δούμε ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχίζεται ένας πίνακας και αντιστρόφως. Επιπλέον, αν οι πίνακες A και B είναι αντίστοιχοι των γραμμικών απεικονίσεων f και g, τότε ο πίνακας που ορίζουμε ως γινόμενο AB είναι ο αντίστοιχος της απεικόνισης $f\circ g$. Έτσι οδηγούμεθα στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2.3 *Αν* $\mathrm{A}=\left(\quad\right)\in \quad_{\times}(\mathrm{K}),\mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)\in \mathrm{M}_{\nu\ \rho}(\mathrm{K})$*,* ***το γινόμενο*** $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ *ή απλά* *είναι ένας πίνακας τύπου* $\mu\times\rho$ *με γενικό στοιχείο*

$$c_{ij}=a_{i}\quad+\quad_{i}\quad+\ldots+a_{i\nu}b_{\nu j}=\sum_{k=1}^{\nu}a_{ik}b_{kj}\,,$$

που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της i*- γραμμής του πίνακα* *με τα αντίστοιχα στοιχεία της* $j-$ *στήλης του πίνακα* B *και άθροιση των γινομένων που προκύπτουν.*

Για παράδειγμα, αν $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&4\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}2&-3\\1&2\\5&6\end{bmatrix}$, τότε $\mathrm{AB}=\begin{bmatrix}12&9\\25&20\end{bmatrix}$,

ενώ ορίζεται και ο πίνακας

$$\mathrm{BA}=\begin{bmatrix}2\cdot1+(-3)\cdot2 & 2\cdot0+(-3)\cdot1 & 2\cdot2+(-3)\cdot4\\ 1\cdot1+2\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot4\\ 5\cdot1+6\cdot2 & 5\cdot0+6\cdot1 & 5\cdot2+6\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3&-8\\5&2&10\\17&6&34\end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις

- *Το γινόμενο* AB *ορίζεται μόνον όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα* A *ισούται με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα* B.
- *Σχηματικά έχουμε*

$$\underbrace{\mathrm{A}}_{\mu\times\nu}\cdot\underbrace{\mathrm{B}}_{\nu\times\rho}\longrightarrow\underbrace{\mathrm{AB}}_{\mu\times\rho},$$

ενώ για τους παραπάνω πίνακες το γινόμενο BA *ορίζεται, μόνον όταν* $\mu=\rho$ *και εν γένει έχουμε* $\mathrm{AB}\neq\mathrm{BA}$.

Θεώρημα 2. 2. 3 *Αν οι πίνακες* $\ ,\mathrm{B},\Gamma$ *είναι κατάλληλου τύπου, ώστε να ορίζονται οι πράξεις που εμφανίζονται, τότε ισχύουν:*

(i) $\quad\Gamma=\mathrm{A}\quad\Gamma)$ ***(προσεταιριστική ιδιότητα)***

ii) $(\quad+\Gamma)\quad\mathrm{B}+\mathrm{A}\Gamma$

$(\quad\Gamma)\mathrm{A}\quad\mathrm{A}+\Gamma\mathrm{A}$ **,** ***(επιμεριστικές ιδιότητες)***

(iii) $\mathrm{AB}=\mathrm{O}\not\Rightarrow\mathrm{A}=\mathrm{O}$ ή $\mathrm{B}=\mathrm{O}$**.**

Απόδειξη (i) Αν είναι $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{\mu\times\nu}, \mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)_{\nu\times\rho}, \Gamma=\left(c_{ij}\right)_{\rho\times\tau}$, και γράψουμε το γενικό στοιχείο του πίνακα Α ως $a_{ij}=(\mathrm{A})_{ij}$ κλπ., τότε έχουμε

$$(\mathrm{AB})\Gamma=\sum_{k=1}^{\rho}(\mathrm{AB})_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{\rho}\left(\sum_{\sigma=1}^{\nu}a_{i\sigma}b_{\sigma k}\right)c_{kj}=\sum_{\sigma=1}^{\nu}a_{i\sigma}\left(\sum_{k=1}^{\rho}b_{\sigma k}c_{kj}\right)$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\nu}a_{i\sigma}(\mathrm{B}\Gamma)_{\sigma j}=\mathrm{A}(\mathrm{B}\Gamma).$$

(ii) Αν είναι $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{\mu\times\nu}, \mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)_{\nu\times\rho}, \Gamma=\left(c_{ij}\right)_{\nu\times\rho}$, τότε έχουμε

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}+\Gamma)=\sum_{k=1}^{\nu}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{\nu}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{\nu}a_{ik}c_{kj}=\mathrm{AB}+\mathrm{A}\Gamma.$$

Ομοίως, αν $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{\nu\times\rho}, \mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)_{\mu\times\nu}, \Gamma=\left(c_{ij}\right)_{\mu\times\nu}$, τότε έχουμε

$$(\mathrm{B}+\Gamma)\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{\nu}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj}=\sum_{k=1}^{\nu}b_{ik}a_{kj}+\sum_{k=1}^{\nu}c_{ik}a_{kj}=\mathrm{BA}+\Gamma\mathrm{A}.$$

(iii) Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα με πίνακες για τους οποίους ισχύει ότι $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$ με $\mathrm{A}\neq\mathrm{O}$ και $\mathrm{B}\neq\mathrm{O}$. Τέτοιοι είναι, για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\-2&-3\end{bmatrix}.$$ □

Ο μοναδιαίος πίνακας

Ο πίνακας

$$\mathrm{I}_{\nu}=\left(\delta_{ij}\right)_{\nu\times\nu}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}, \text{ όπου } \delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{ αν } i=j\\0, \text{ αν } i\neq j\end{cases}$$

είναι η **συνάρτηση δέλτα του Kronecker,** ονομάζεται **μοναδιαίος πίνακας** και έχει τις ιδιότητες:

$\mathrm{AI}_{\nu}=\mathrm{I}_{\nu}\mathrm{A}=\mathrm{A}$, για κάθε πίνακα Α τύπου $\nu\times\nu$,

$\mathrm{AI}_{\nu}=\mathrm{A}$, για κάθε πίνακα Α τύπου $\mu\times\nu$,

$\mathrm{I}_{\nu}\mathrm{A}=\mathrm{A}$, για κάθε πίνακα Α τύπου $\nu\times\rho$.

Ο αντίστροφος πίνακας

Ορισμός 2.2.4 *Αν ο πίνακας* A *είναι τετραγωνικός τύπου* $\nu \times \nu$ *και υπάρχει πίνακας* X *τέτοιος ώστε*

$$\mathrm{AX} = \mathrm{XA} = \mathrm{I}_\nu,$$

τότε λέμε ότι ***ο πίνακας*** A ***είναι αντιστρέψιμος*** *και ο πίνακας* X *είναι ο αντίστροφος πίνακας του* A*. Γράφουμε τότε* $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}$.

Θεώρημα 2.2.4 *Αν οι* $\nu \times \nu$ *πίνακες* A, B *είναι αντιστρέψιμοι, τότε ισχύουν:*

(i) $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{A}$ **(ii)** $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Απόδειξη

(i) Από τον ορισμό 2.2.4 έχουμε ότι $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_\nu$, οπότε προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

(ii) $(\mathrm{AB})(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{A}(\mathrm{BB}^{-1})\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{AI}_\nu\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{I}_\nu$

και ομοίως αποδεικνύεται ότι: $(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})(\mathrm{AB}) = \mathrm{I}_\nu$. □

Στα επόμενα κεφάλαια θα θεωρήσουμε δύο τρόπους εύρεσης του αντίστροφου ενός πίνακα, αν αυτός υπάρχει. Σημειώνουμε ότι δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο πίνακα. Στο παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε ένα τύπο για τον υπολογισμό του αντίστροφου ενός 2×2 πίνακα.

Αν είναι $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ είναι ο ζητούμενος αντίστροφος του πίνακα A ,τότε από τις ισότητες $\mathrm{AX} = \mathrm{XA} = \mathrm{I}_2$ και την επίλυση των γραμμικών συστημάτων με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους που προκύπτουν, με την προϋπόθεση ότι $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, λαμβάνουμε:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Οι δυνάμεις ενός $\nu \times \nu$ πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό $\nu \times \nu$ πίνακα A ορίζουμε τις δυνάμεις του ως εξής:

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_\nu,\ \mathrm{A}^1 = \mathrm{A} \text{ και } \mathrm{A}^n = \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{A}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \text{ με } n \geq 2.$$

Επιπλέον, αν πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζουμε

$$\mathrm{A}^{-n} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{n}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^{*}.$$

Με βάση τις ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων προκύπτουν αμέσως οι ιδιότητες:

1. $\mathrm{A}^{m}\mathrm{A}^{n} = \mathrm{A}^{n}\mathrm{A}^{m} = \mathrm{A}^{m+n}$, για κάθε $m,n \in \mathbb{Z}$.
2. $\left(\mathrm{A}^{m}\right)^{n} = \mathrm{A}^{mn}$, για κάθε $m,n \in \mathbb{Z}$.
3. $\left(\lambda\mathrm{A}\right)^{n} = \lambda^{n}\mathrm{A}^{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

   (Για $n<0$ απαιτείται η ισότητα $\left(\lambda\mathrm{A}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{A}^{-1}$, για κάθε $\lambda \neq 0$)
4. $\left(\mathrm{A}^{n}\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
5. $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{2} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{A}^{2}+\mathrm{AB}+\mathrm{BA}+\mathrm{B}^{2}$.
6. Αν $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$, τότε ισχύουν:
   - $(\mathrm{A}\pm\mathrm{B})^{2} = \mathrm{A}^{2} \pm 2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^{2}$
   - $(\mathrm{A}\pm\mathrm{B})^{3} = \mathrm{A}^{3} \pm 3\mathrm{A}^{2}\mathrm{B}+3\mathrm{AB}^{2} \pm \mathrm{B}^{3}$
   - $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}^{2}-\mathrm{B}^{2}$
   - $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{A}^{n-k}\mathrm{B}^{k}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^{*}$.

Ο ανάστροφος πίνακας

Ορισμός 2. 2. 5 Αν $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$, τότε ο πίνακας που προκύπτει από τον A με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών του λέγεται **ανάστροφος πίνακας** του A και συμβολίζεται με A^{T}, έχουμε δηλαδή

$$\mathrm{A}^{T} = \left(a_{ji}\right) \in \mathrm{M}_{\nu\times\mu}.$$

Για παράδειγμα, αν είναι

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\\ 0 & -5\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}, \text{ τότε } \mathrm{A}^{T}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & -5\end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{B}^{T}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

Από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες:

1. $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T$, για κάθε $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$,

2. $(\lambda\mathrm{A})^T = \lambda\mathrm{A}^T$, για κάθε $\lambda \in \mathrm{K}, \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$,

3. $(\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T$, για κάθε $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\nu\times\rho}$,

4. $\mathrm{I}_\nu^T = \mathrm{I}_\nu$,

5. $\left(\mathrm{A}^T\right)^T = \mathrm{A}$, για κάθε $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$ και

6. $\left(\mathrm{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^T$

Απόδειξη. Η απόδειξη των περισσοτέρων από τις παραπάνω ιδιότητες είναι απλή εφαρμογή του ορισμού. Ειδικότερα για την **3,** αν με $(\mathrm{A})_{ij}$ συμβολίσουμε το γενικό στοιχείο του πίνακα A, έχουμε :

$$\left((\mathrm{AB})^T\right)_{ij} = (\mathrm{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{\nu}(\mathrm{B}^T)_{ik}(\mathrm{A}^T)_{kj} = \left(\mathrm{B}^T\mathrm{A}^T\right)_{ij}.$$

Για την **6** έχουμε

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_\nu \Rightarrow \left(\mathrm{AA}^{-1}\right)^T = \left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}\right)^T = \mathrm{I}_\nu^T \Rightarrow \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^T\mathrm{A} = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^T = \mathrm{I}_\nu,$$

οπότε, λόγω της μοναδικότητας του αντίστροφου ενός πίνακα, θα ισχύει ότι

$$\left(\mathrm{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^T$$

□

Ορισμός 2.2.6 *Ο τετραγωνικός πίνακας* $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}_\nu$ *λέγεται:*

(i) ***συμμετρικός****, αν* $\mathrm{A}^T = \mathrm{A}$*, δηλαδή, αν* $a_{ij} = a_{ji}$*, για κάθε* $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$,

(ii) ***αντισυμμετρικός****, αν* $\mathrm{A}^T = -\mathrm{A}$*, δηλαδή. αν* $a_{ij} = -a_{ji}$*, για κάθε* $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Για παράδειγμα, από τους πίνακες

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ο A είναι συμμετρικός, ενώ ο B είναι αντισυμμετρικός. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα B είναι όλα μηδέν. Αυτό δεν είναι τυχαίο, αλλά ισχύει σε κάθε αντισυμμετρικό πίνακα, αφού από την ισότητα $a_{ij} = -a_{ji}$ για $i = j$ προκύπτει ότι $a_{ii} = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

2. 3 Ειδικοί τύποι πινάκων

Κατ' αρχή σημειώνουμε ότι, σε μία γραμμή που δεν έχει όλα τα στοιχεία της 0 (μη μηδενική γραμμή), το **ηγετικό στοιχείο** της είναι το πρώτο, από αριστερά προς τα δεξιά, μη μηδενικό στοιχείο της.

Ορισμός 2. 3. 1 (α) *Ο πίνακας* $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{\mu\times\nu}$ *λέγεται* ***κλιμακωτός*** *ή* ***κλιμακωτής μορφής****, όταν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, βρίσκονται στη σειρά μετά τις μη μηδενικές γραμμές και*

(ii) *αν* $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_\kappa, \kappa\le\mu$ *είναι οι μη μηδενικές γραμμές του πίνακα* A, *τότε το ηγετικό στοιχείο της* γ_{i+1} *- γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το ηγετικό στοιχείο της* γ_i *-γραμμής.*

(β) *Ο πίνακας* $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{\mu\times\nu}$ *λέγεται* ***ανηγμένος κλιμακωτός*** *ή* ***ανηγμένης κλιμακωτής μορφής****, αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *είναι κλιμακωτός,*

(ii) *το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι 1 και*

(iii) *σε μία στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο κάποιας γραμμής, όλα τα άλλα στοιχεία της είναι 0.*

Για παράδειγμα, οι παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί

$$A=\begin{bmatrix}3&0&1&-2\\0&2&3&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \text{ και } B=\begin{bmatrix}0&2&-1&3&4\\0&0&1&2&3\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

ενώ ανηγμένοι κλιμακωτοί είναι οι πίνακες

$$\Gamma=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ και } \Delta=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Στοιχειώδεις πράξεις και πίνακες

Στο σύνολο των $\mu\times\nu$ πινάκων θεωρούμε απεικονίσεις της μορφής

$$\tau: M_{\mu\times\nu}\to M_{\mu\times\nu},\ A\to\tau(A),$$

που λέγονται **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών** ή **γραμμοπράξεις.**

Ο πίνακας $\tau(A)$ προκύπτει από τον πίνακα A με εφαρμογή μιας από τις ακόλουθες διαδικασίες:

I. $\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j$, *εναλλαγή της* $i-$ *γραμμής με την* $j-$ *γραμμή*

II. $\gamma_i \to \lambda\gamma_i, \lambda \neq 0$, *πολλαπλασιασμός της* $i-$ *γραμμής επί* $\lambda \neq 0$.

III. $\gamma_i \to \gamma_i + \lambda\gamma_j, \lambda \neq 0$, *αντικατάσταση της* $i-$ *γραμμής από το άθροισμα αυτής και του* $\lambda-$ *πλασίου της* $j-$ *γραμμής.*

Οι πίνακες Α και $\tau(\mathrm{A})$ λέγονται **γραμμοϊσοδύναμοι.**
Όμοια, ορίζονται και οι **στοιχειώδεις πράξεις στηλών** ή **στηλοπράξεις**

$$\sigma : \mathrm{M}_{\mu\times\nu} \to \mathrm{M}_{\mu\times\nu}, \mathrm{A} \to \sigma(\mathrm{A})$$

και συμβολίζονται με

$$\sigma_i \leftrightarrow \sigma_j, \sigma_i \to \lambda\sigma_i, \sigma_i \to \sigma_i + \lambda\sigma_j, \lambda \neq 0 .$$

Σε κάθε μία από τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (αντίστοιχα, στηλών) αντιστοιχίζουμε ένα **στοιχειώδη πίνακα**. Έτσι, στη στοιχειώδη πράξη γραμμών τ που εφαρμόζεται σε $\mu\times\nu$ πίνακα, αντιστοιχίζουμε τον στοιχειώδη πίνακα $\tau\left(\mathrm{I}_\mu\right)$ που προκύπτει από την εφαρμογή της τ στο μοναδιαίο πίνακα I_μ, ενώ στη στοιχειώδη πράξη στηλών σ που εφαρμόζεται σε $\mu\times\nu$ πίνακα, αντιστοιχίζουμε το στοιχειώδη πίνακα $\sigma\left(\mathrm{I}_\nu\right)$ που προκύπτει από την εφαρμογή της σ στο μοναδιαίο πίνακα I_ν. Για παράδειγμα, στις στοιχειώδεις πράξεις

$$\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 ,\ \sigma_2 \to 3\sigma_2,\ \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_3 + 2\gamma_1 ,$$

όταν εφαρμόζονται σε 3×4 πίνακα, αντιστοιχίζονται οι παρακάτω στοιχειώδεις πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 4 Αναγωγή πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό

Θεωρούμε έναν πίνακα $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$. Αυτός με διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών ανάγεται αρχικά σε κλιμακωτό και στη συνέχεια σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Η διαδικασία αναγωγής είναι αλγοριθμική ***(αλγόριθμος των Gauss-Jordan)*** και περιγράφεται ως εξής:

I. *Με εναλλαγή γραμμών, αν είναι ανάγκη, κάνουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης μη μηδενικής στήλης διάφορο του 0. Το στοιχείο αυτό το ονομάζουμε* ***βασικό (pivot),*** *όπως και το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής.*

II. *Με εφαρμογή της γραμμοπράξης* $\gamma_1 \to \left(1/a_{11} \right)\gamma_1$ *το στοιχείο* a_{11} *γίνεται ίσο με 1. Στη συνέχεια με εφαρμογή των γραμμοπράξεων*

$$\gamma_2 \to \gamma_2 - a_{21}\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu \to \gamma_\mu - a_{\mu 1}\gamma_1$$

μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης εκτός του βασικού. Αν όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι 0, τότε εφαρμόζουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε στην πρώτη από τις επόμενες στήλες που έχει μη μηδενικά στοιχεία, κ.ο.κ.

III. *Αγνοώντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του πίνακα που έχει προκύψει, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για να κάνουμε το στοιχείο* a_{22} *ίσο με 1 και τα στοιχεία* $a_{32}, \ldots, a_{\mu 2}$ *της δεύτερης στήλης που βρίσκονται κάτω από το* a_{22} *ίσα με 0. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρις ότου ο πίνακας* A *γίνει κλιμακωτός και με τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του ίσα με 1.*

IV. *Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τύπου* **III** *μετατρέπουμε τα μη μηδενικά στοιχεία κάθε στήλης που περιέχει το ηγετικό 1 μιας γραμμής σε μηδενικά αρχίζοντας από αυτήν που είναι δεξιότερα.*

Παρατηρήσεις

1. *Με τα βήματα* ***I*** *και* ***II*** *ο πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτό, χωρίς να είναι αναγκαίο να γίνουν τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών ίσα με 1. Γενικά ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει δεν είναι μοναδικός έχει όμως πάντοτε τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών. Ο αριθμός αυτός έχει μεγάλη σημασία για έναν πίνακα και στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι ονομάζεται βαθμός του πίνακα.*
2. *Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει με τον παραπάνω αλγόριθμο είναι μοναδικός.*
3. *Τα τρία πρώτα βήματα της παραπάνω μεθόδου αποτελούν τη* ***μέθοδο απαλοιφής του Gauss,*** *ενώ η πλήρης μέθοδος είναι η* ***μέθοδος απαλοιφής των Gauss-Jordan****. Η αναγωγή πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό είναι πολύ χρήσιμη για την εύρεση του βαθμού πίνακα, αλλά και για την επίλυση γραμμικών συστημάτων*

Παράδειγμα 2.4.1 Να μετατραπεί σε ανηγμένο κλιμακωτό ο πίνακας

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Ο πίνακας Α γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_4 \to \gamma_4 - 3\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3]{\gamma_3 \to \left(\frac{1}{4}\right)\gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_4 \to \gamma_4 - 8\gamma_2]{\gamma_3 \to \gamma_3 - 4\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\gamma_3 \to \left(\frac{1}{10}\right)\gamma_3]{\gamma_3 \leftrightarrow \gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_4 \to \left(\frac{1}{14}\right)\gamma_4]{\gamma_4 \to \gamma_4 - 10\gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 + 5\gamma_4]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_3]{\gamma_2 \to \gamma_2 + 2\gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές προτάσεις σχετικές με τις στοιχειώδεις πράξεις, τους στοιχειώδεις πίνακες και την εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα.

Πρόταση 2.4.1 (α) *Αν* $\tau : \mathrm{M}_{\mu\times\nu} \to \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$ *είναι μία στοιχειώδης πράξη γραμμών και* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$, *τότε*

$$\tau(\mathrm{A}) = \tau\left(\mathrm{I}_\mu\right)\mathrm{A}.$$

(β) *Αν* $\sigma : \mathrm{M}_{\mu\times\nu} \to \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$ *είναι μία στοιχειώδης πράξη στηλών και* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu}$, *τότε*

$$\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\sigma\left(\mathrm{I}_\nu\right).$$

Απόδειξη

(α) Θα εξετάσουμε μόνο τις στοιχειώδεις πράξεις τύπου Ι, $(\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j)$. Οι άλλες δύο περιπτώσεις και το ερώτημα (β) αποδεικνύονται ανάλογα.

Ο στοιχειώδης πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμοπράξη $\tau(\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j)$ είναι

$$\tau\left(\mathrm{I}_\mu\right)=\mathrm{I}_\mu-\mathrm{E}_{ii}-\mathrm{E}_{jj}+\mathrm{E}_{ij}+\mathrm{E}_{ji},$$

όπου E_{ij} είναι $\mu\times\mu$ πίνακας που έχει το $ij-$στοιχείο του ίσο με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι 0. Έστω ότι ο πίνακας $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)_{\mu\times\nu}$ έχει γραμμές $\gamma_k=\left[a_{k1}\,a_{k2}\ldots a_{k\nu}\right]$, $1\le k\le\mu$. Τότε θα είναι

$$\tau(\mathrm{A})=\left[\gamma_1\ldots\gamma_{i-1}\,\gamma_j\,\gamma_{i+1}\ldots,\gamma_{j-1}\,\gamma_i\,\gamma_{j+1}\ldots\gamma_\mu\right]^T.$$

Επίσης έχουμε

$$\tau\left(\mathrm{I}_\mu\right)\mathrm{A}=\left(\mathrm{I}_\mu-\mathrm{E}_{ii}-\mathrm{E}_{jj}+\mathrm{E}_{ij}+\mathrm{E}_{ji}\right)\mathrm{A}=\mathrm{A}-\mathrm{E}_{ii}\mathrm{A}-\mathrm{E}_{jj}\mathrm{A}+\mathrm{E}_{ij}\mathrm{A}+\mathrm{E}_{ji}\mathrm{A}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_i\\ \vdots\\ \gamma_j\\ \vdots\\ \gamma_\mu\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \gamma_i\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ \gamma_j\\ \vdots\\ a_\mu\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ \gamma_\mu\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ \gamma_i\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_j\\ \vdots\\ \gamma_i\\ \vdots\\ \gamma_\mu\end{bmatrix}=\tau(\mathrm{A}).\qquad\square$$

Παρατήρηση

Σημειώνουμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες που αντιστοιχίζονται στις στοιχειώδεις πράξεις $\gamma_i\to\lambda\gamma_i$ *και* $\gamma_i\to\gamma_i+\lambda\gamma_j,\lambda\ne 0$ *είναι οι* $diag(1,\ldots,\lambda,\ldots 1)$ *και* $\mathrm{I}_\mu+\lambda\mathrm{E}_{ij}$*, αντίστοιχα.*

Πρόταση 2.4.2 *Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω P και Q οι στοιχειώδεις πίνακες που αντιστοιχούν σε μία γραμμοπράξη τ και στην αντίστροφή της, έστω τ^{-1}.

Σύμφωνα με την πρόταση 2.4.1 έχουμε

$$\mathrm{I}_\mu=\tau^{-1}\left(\tau\left(\mathrm{I}_\mu\right)\right)=\tau^{-1}\left(P\mathrm{I}_\mu\right)=Q\left(P\mathrm{I}_\mu\right)=QP,$$
$$\mathrm{I}_\mu=\tau\left(\tau^{-1}\left(\mathrm{I}_\mu\right)\right)=\tau\left(Q\mathrm{I}_\mu\right)=P\left(Q\mathrm{I}_\mu\right)=PQ.$$

Άρα έχουμε την ισότητα $PQ=QP=\mathrm{I}_\mu$, οπότε ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος με

$$P^{-1}=Q.\qquad\square$$

2. 5 Εύρεση του αντίστροφου πίνακα

Από τις προτάσεις 2.4.1 και 2.4.2 έπεται ότι ο πίνακας που προκύπτει με διαδοχική εφαρμογή γραμμοπράξεων σε έναν $\mu\times\nu$ πίνακα A είναι της μορφής $P\mathrm{A}$, όπου ο P είναι αντιστρέψιμος $\mu\times\mu$ πίνακας ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Ειδικότερα, για τετραγωνικούς πίνακες έχουμε:

Πρόταση 2. 5. 1 *Έστω ότι ο πίνακας* $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_{\mu}(\mathrm{K})$ *με διαδοχική εφαρμογή γραμμοπράξεων* $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_s$ *με αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες* $P_1,P_2,\ldots,P_s$ *μετασχηματίζεται στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα* A_R. *Τότε ισχύουν:*

I. *Αν ο* A_R *έχει μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή, τότε ο πίνακας* A *είναι μη αντιστρέψιμος*

II. *Αν ο* A_R *δεν έχει μηδενικές γραμμές, τότε* $\mathrm{A}_R=\mathrm{I}_{\mu}$ *, ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος και* $\mathrm{A}^{-1}=P_s\cdots P_2P_1\mathrm{I}_{\mu}$.

Απόδειξη

I. Έστω ότι ο πίνακας A_R έχει μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή και ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε θα υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε

$$\mathrm{AX}=\mathrm{XA}=\mathrm{I}_{\mu}. \tag{1}$$

Από την πρόταση 2.4.1, θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P=P_s\cdots P_2P_1$ τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$P_s\cdots P_2P_1\mathrm{A}=P\mathrm{A}=\mathrm{A}_R. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\mathrm{I}_{\mu}=PP^{-1}=P\mathrm{AX}P^{-1}=\mathrm{A}_R\mathrm{X}P^{-1}$$

$$\mathrm{I}_{\mu}=\mathrm{XA}=\mathrm{X}P^{-1}P\mathrm{A}=\mathrm{X}P^{-1}\mathrm{A}_R,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$\mathrm{A}_R\left(\mathrm{X}P^{-1}\right)=\left(\mathrm{X}P^{-1}\right)\mathrm{A}=\mathrm{I}_{\mu},$$

δηλαδή ο πίνακας A_R είναι αντιστρέψιμος, που είναι άτοπο, γιατί ο πίνακας A_R έχει μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή και το γινόμενό του με οποιονδήποτε πίνακα θα περιέχει επίσης μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή και έτσι δεν μπορεί να είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Άρα ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΙΙ. Αν ο πίνακας A_R δεν έχει μηδενική γραμμή, τότε αυτός θα περιέχει μ ηγετικά 1 κατανεμημένα σε μ μη μηδενικές γραμμές, που το καθένα βρίσκεται δεξιότερα από το ηγετικό 1 της προηγούμενης γραμμής, οπότε θα είναι $\mathrm{A}_R = \mathrm{I}_\mu$. Επιπλέον θα ισχύει

$$P_s \cdots P_2 P_1 \mathrm{A} = P\mathrm{A} = \mathrm{A}_R = \mathrm{I}_\mu \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1 = P . \qquad \square$$

Αν γράψουμε δίπλα στον πίνακα $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_\mu(\mathrm{K})$ τον μοναδιαίο πίνακα I_μ και εφαρμόσουμε και στους δύο ταυτόχρονα τις ίδιες στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, ώστε ο πίνακας A να μετασχηματιστεί στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα A_R, τότε θα έχουμε

$$\left[\mathrm{A} \,|\, \mathrm{I}_\mu\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\mathrm{A}_R \,|\, \mathrm{B}\right].$$

Από την πρόταση 2.5.1 συμπεραίνουμε ότι:

- *Αν* $\mathrm{A}_R \neq \mathrm{I}_\mu$ *, τότε ο πίνακας* A *δεν αντιστρέφεται.*
- *Αν* $\mathrm{A}_R = \mathrm{I}_\mu$ *, τότε ο πίνακας* A *αντιστρέφεται και* $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

Παράδειγμα 2. 5. 1 Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Έχουμε

$$\left[\mathrm{A} \,|\, \mathrm{I}_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\gamma_2 \to (-1)\gamma_2]{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 - 3\gamma_3]{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \left[\mathrm{I}_3 \,\middle|\, \mathrm{B}\right].$$

Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 6 Εισαγωγή στα γραμμικά συστήματα

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \beta, \qquad (1)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \beta \in \mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ άγνωστοι αριθμοί από το σώμα K, λέγεται **γραμμική εξίσωση με** ν **αγνώστους**. Ο αριθμός β λέγεται **σταθερός όρος** της εξίσωσης, ενώ οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ λέγονται **συντελεστές των αγνώστων.**

Λύση της γραμμικής εξίσωσης (1) λέγεται κάθε διατεταγμένη ν-άδα $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu) \in \mathrm{K}^\nu$ τέτοια ώστε

$$\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \ldots + \lambda_\nu \omega_\nu = \beta,$$

δηλαδή επαληθεύεται η εξίσωση, αν θέσουμε $x_i = \omega_i, i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Γραμμικό σύστημα με μ εξισώσεις και ν αγνώστους ή $\mu \times \nu$- γραμμικό σύστημα είναι ένα (πεπερασμένο) πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους, δηλαδή έχει τη μορφή

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu} x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} x_\nu = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu} x_\nu = \beta_\mu \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\nu} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & . & . & . & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \ \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

τότε το γραμμικό σύστημα (2) γράφεται ως μία εξίσωση πινάκων

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}\ , \qquad (3)$$

όπου ο πίνακας A είναι πίνακας των συντελεστών, ο πίνακας X είναι ο πίνακας των αγνώστων και ο πίνακας B είναι πίνακας των σταθερών όρων.

Λύση της γραμμικού συστήματος (2) λέγεται κάθε διατεταγμένη ν -άδα $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu) \in \mathrm{K}^\nu$ που επαληθεύει και τις μ εξισώσεις του συστήματος (2).

Το γραμμικό σύστημα (2) λέγεται **συμβιβαστό**, αν έχει μία τουλάχιστον λύση, ενώ λέγεται **αδύνατο**, αν δεν έχει λύση.

Για λόγους συμβατότητας με τους συμβολισμούς μας θα συμβολίζουμε τη λύση $\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu\right)$ και με τον πίνακα-στήλη

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_\nu \end{bmatrix}^T .$$

Δύο γραμμικά συστήματα με μ εξισώσεις και ν αγνώστους

$$\mathrm{A}_1\mathrm{X} = \mathrm{B}_1 \quad \text{και} \quad \mathrm{A}_2\mathrm{X} = \mathrm{B}_2 ,$$

λέγονται **ισοδύναμα**, αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

Η **επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή η διαδικασία εύρεσης όλων των λύσεων του συστήματος, βασίζεται στην εύρεση άλλων γραμμικών συστημάτων ισοδυνάμων προς το αρχικό, αλλά απλούστερης μορφής.

Αν ο πίνακας B των σταθερών όρων είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλαδή αν είναι $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$, τότε το γραμμικό σύστημα γίνεται

$$\mathrm{AX} = \mathrm{O} \tag{4}$$

και λέγεται **ομογενές**.

Ο πίνακας $\left[\mathrm{A}\middle|\mathrm{B}\right] \in \mathrm{M}_{\mu\times(\nu+1)}$ που είναι ο πίνακας A συμπληρωμένος με μία τελευταία στήλη, αυτήν που ορίζει ο πίνακας B των σταθερών όρων λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$.

2. 7 Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Η βασική μέθοδος επίλυσης του γραμμικού συστήματος

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} , \qquad \textbf{(Σ)}$$

όπου

$$\mathrm{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_{\mu\times\nu} ,\ \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\nu \end{bmatrix}^T ,\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_\mu \end{bmatrix}^T ,$$

είναι **η μέθοδος απαλοιφής του Gauss** .

Η μέθοδος αυτή ουσιαστικά συνίσταται στο μετασχηματισμό του επαυξημένου πίνακα $\left[\mathrm{A}\middle|\mathrm{B}\right]$ του συστήματος **(Σ)** σε ανηγμένο κλιμακωτό με χρήση μόνο στοιχειωδών πράξεων γραμμών, ακολουθώντας τον **αλγόριθμο των Gauss-Jordan** που περιγράψαμε παραπάνω στην παράγραφο 2.4, ως εξής:

Ι. *Με εναλλαγή γραμμών, αν είναι ανάγκη κάνουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης μη μηδενικής στήλης διάφορο του 0. Το στοιχείο αυτό το ονομάζουμε **βασικό (pivot),** όπως και το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής.*

II. *Με εφαρμογή της γραμμοπράξης* $\gamma_1 \rightarrow \left(1/a_{11} \right) \gamma_1$ *το στοιχείο* a_{11} *γίνεται ίσο με 1.Στη συνέχεια με εφαρμογή των γραμμοπράξεων*

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - a_{21}\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu - a_{\mu 1}\gamma_1,$$

μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης εκτός του βασικού. Αν όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι 0, τότε η διαδικασία που περιγράψαμε εφαρμόζεται στην πρώτη από τις επόμενες στήλες που έχει μη μηδενικά στοιχεία, κ.ο.κ.

III. *Αγνοώντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του πίνακα που έχει προκύψει, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για να κάνουμε το στοιχείο* a_{22} *ίσο με 1 και τα στοιχεία* $a_{32}, \ldots, a_{\mu 2}$ *της δεύτερης στήλης που βρίσκονται κάτω από το* a_{22} *ίσα με 0. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρις ότου ο πίνακας* A *γίνει κλιμακωτός και με τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του ίσα με 1.*

IV. *Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τύπου ΙΙΙ μετατρέπουμε τα μη μηδενικά στοιχεία κάθε στήλης που περιέχει το ηγετικό 1 μιας γραμμής σε μηδενικά, αρχίζοντας από αυτήν που είναι δεξιότερα.*

Είναι φανερό ότι με διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος **(Σ)**, τα προκύπτοντα συστήματα έχουν εξισώσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των εξισώσεων του αρχικού συστήματος **(Σ)**. Έτσι, τα συστήματα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα προς το αρχικό σύστημα, δηλαδή έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων με το σύστημα **(Σ)**.

Μετά την αναγωγή του επαυξημένου πίνακα $[\mathrm{A}|\mathrm{B}]$ σε ανηγμένο κλιμακωτό διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- *Αν στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα υπάρχει γραμμή της μορφής*
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & |\beta \end{bmatrix}, \beta \neq 0,$$
τότε το σύστημα είναι ***αδύνατο***.
- *Αν δεν υπάρχουν γραμμές της μορφής* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & |\beta \end{bmatrix}, \beta \neq 0$ *και έχουμε συνολικά* κ *μη μηδενικές γραμμές,* $\kappa \leq \min\{\mu, \nu\}$*, τότε θεωρούμε τους* $\nu - \kappa$ *αγνώστους που αντιστοιχούν σε στήλες του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα, που δεν περιέχουν κάποιο από τα ηγετικά 1, ως αυθαίρετους και εκφράζουμε τους υπόλοιπους αγνώστους ως συναρτήσεις των αυθαίρετων αγνώστων.*

Παράδειγμα 1. Να προσδιορίσετε το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος:

$$\{x + 2y + 3z + w = 3,\ y - z + 2w = 4,\ x + 3y + 2z + 3w = 7\}.$$

Λύση. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ανηγμένο κλιμακωτό. Έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Από τη μορφή του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα που προκύπτει συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό. Οι άγνωστοι z και w που αντιστοιχούν στις δύο τελευταίες στήλες, οι οποίες δεν περιέχουν κάποιο από τα ηγετικά 1 των μη μηδενικών γραμμών, επιλέγονται ως ανεξάρτητοι (αυθαίρετοι) άγνωστοι, ενώ οι άγνωστοι x και y που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες στήλες, οι οποίες περιέχουν τα ηγετικά 1 των μη μηδενικών γραμμών, είναι οι εξαρτημένοι άγνωστοι. Έτσι έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x + 5z - 3w = -5 \\ y - z + 2w \ = \ 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -5 - 5z + 3w \\ y = 4 + z - 2w, \ z, w \in \mathbb{R} \end{array}\right\}.$$

Επομένως, η τυχούσα από τις άπειρες λύσεις του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= (-5 - 5\kappa + 3\lambda, 4 + \kappa - 2\lambda, \kappa, \lambda) \\ &= (-5, 4, 0, 0) + \kappa(-5, 1, 1, 0) + \lambda(3, -2, 0, 1), \ \ \kappa, \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

ενώ το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το

$$\Lambda = \left\{(-5 - 5\kappa + 3\lambda, 4 + \kappa - 2\lambda, \kappa, \lambda) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Παράδειγμα 2. Να προσδιορίσετε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος γίνεται :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

και το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left\{\begin{matrix} x_1+x_3+2x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=-x_3-2x_4 \\ x_2=-x_3-x_4,\ x_3,x_4\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\}.$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων του δεδομένου ομογενούς συστήματος είναι

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{(-\kappa-2\lambda,-\kappa-\lambda,\kappa,\lambda) : \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\} \\ &= \{\kappa(-1,-1,1,0)+\lambda(-2,-1,0,1) : \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες έχει λύση το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} x+3y+5z=1 \\ 2x+4z=1 \\ x-y+z=a, a\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\}$$

και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση του συστήματος.

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος γίνεται:

$$\left[A|B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3-\gamma_1]{\gamma_2\to\gamma_2-2\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_2\to\left(-\frac{1}{6}\right)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/6 \\ 0 & -4 & -4 & a-1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_1\to\gamma_1-3\gamma_2]{\gamma_3\to\gamma_3+4\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & a-1/3 \end{array}\right].$$

Επομένως το σύστημα είναι συμβιβαστό, όταν $a-1/3=0 \Leftrightarrow a=1/3$.

Για $a=\dfrac{1}{3}$, το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} x+2z=1/2 \\ y+z=1/6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=1/2-z \\ y=1/6-z \end{matrix}\right\}, z\in\mathbb{R}$$

οπότε το σύνολο των λύσεων του είναι

$$\Lambda=\left\{\left(\frac{1}{2}-c,\frac{1}{6}-c,c\right) : c\in\mathbb{R}\right\}.$$

2.8 Η LU – παραγοντοποίηση πίνακα

Όπως ξέρουμε, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss για την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \qquad (\Sigma)$$

βασίζεται στη μετατροπή του επαυξημένου πίνακα $\left[\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\right]$ σε ανηγμένο κλιμακωτό. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μία διαφορετική μέθοδο επίλυσης του γραμμικού συστήματος (Σ) η οποία βασίζεται στην παραγοντοποίηση του πίνακα A των συντελεστών σε γινόμενο δύο πινάκων, ενός κάτω τριγωνικού και ενός κλιμακωτού πίνακα.

Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν έχουμε να λύσουμε πολλά γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα συντελεστών και διαφορετικό πίνακα σταθερών όρων, είναι κατάλληλη για ηλεκτρονικούς υπολογιστές και αποτελεί τη βάση πολλών υπολογιστικών πακέτων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (Σ) και ότι έχουμε παραγοντοποιήσει τον πίνακα $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m\times n}\left(\mathrm{K}\right), \mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ των συντελεστών σε γινόμενο δύο πινάκων της μορφής

$$\mathrm{A} = LU\,, \qquad (1)$$

όπου ο L είναι $m\times m$ κάτω τριγωνικός με τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ίσα με 1, ενώ ο U είναι κλιμακωτός $m\times n$ πίνακας.

Έχουμε

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \left(LU\right)\mathrm{X} = \mathrm{B} \Leftrightarrow L\left(U\mathrm{X}\right) = \mathrm{B}\,,$$

οπότε, αν θέσουμε $\mathrm{Y} = U\mathrm{X}$, τότε έχουμε να επιλύσουμε τα απλά γραμμικά συστήματα με πίνακα κλιμακωτής μορφής

$$L\mathrm{Y} = \mathrm{B} \quad \text{και} \quad U\mathrm{X} = \mathrm{Y}\,.$$

Επιλύουμε το σύστημα $L\mathrm{Y} = \mathrm{B}$ με **αντικατάσταση προς τα εμπρός** και στη συνέχεια επιλύουμε το σύστημα $U\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ με **αντικατάσταση προς τα πίσω.** Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε προς λύση το σύστημα

$$\mathrm{AX} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -9 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathrm{B}$$

και ότι έχουμε βρει την παραγοντοποίηση

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = LU\,.$$

Επιλύουμε πρώτα το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια προκύπτει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,75+0,5\alpha \\ -10 \\ 3,5+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ο αλγόριθμος της LU -παραγοντοποίησης

Θεωρούμε πίνακα $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$ και με διαδοχικές στοιχειώδεις πράξεις γραμμών , **χωρίς να κάνουμε εναλλαγή γραμμών**, μετατρέπουμε τον πίνακα σε **κλιμακωτό**, οπότε έχουμε

$$\mathrm{P}_s \cdots \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{A} = U, \qquad (2)$$

όπου $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots \mathrm{P}_s$ είναι οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες. Επειδή όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι έχουμε

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{P}_2^{-1} \cdots \mathrm{P}_s^{-1}U = LU, \qquad (3)$$

όπου έχουμε θέσει $L = \mathrm{P}_1^{-1}\mathrm{P}_2^{-1} \cdots \mathrm{P}_s^{-1}$. Επιπλέον λαμβάνουμε

$$\mathrm{P}_s \cdots \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 L = \mathrm{I}, \qquad (4)$$

οπότε παρατηρούμε ότι οι ίδιες γραμμοπράξεις μετατρέπουν τον πίνακα L στο μοναδιαίο πίνακα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

των συντελεστών του συστήματος που λύσαμε προηγουμένως. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -9 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \mathbf{1}\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \mathbf{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε ως **βασικό (pivot) στοιχείο** το $a_{11} = 2$ (συμβολίζεται με παχύ μαύρο) και παρατηρούμε ότι οι ίδιες στοιχειώδεις πράξεις δίνουν

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & * & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \mathbf{1}\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \mathbf{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια έχουμε

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_2 + \mathbf{3}\gamma_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = U,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ως βασικό το στοιχείο $a'_{22} = 1$. Παρατηρούμε ότι η ίδια στοιχειώδης πράξη δίνει

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + 3\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε πλέον είναι φανερό ότι ο κατάλληλος πίνακας L που με τις ίδιες γραμμοπράξεις μετατρέπεται στο μοναδιαίο πίνακα είναι ο

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε πλέον να περιγράψουμε τη διαδικασία παραγοντοποίησης του πίνακα Α ως εξής:

(i) *Μετατρέπουμε τον πίνακα* Α *με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, χωρίς εναλλαγές γραμμών, σε κλιμακωτό, οπότε προκύπτει ο πίνακας* U.

(ii) *Διαμορφώνουμε κάθε στήλη του* Α *που έχει* ***βασικό*** *στοιχείο, κάθε φορά που εμφανίζεται, με μηδενικά πάνω από το βασικό στοιχείο και διαιρώντας τα υπόλοιπα στοιχεία της με το βασικό στοιχείο. Οι στήλες που διαμορφώνονται μαζί με μία τελευταία στήλη της μορφής* $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ *αποτελούν τις στήλες του πίνακα* L.

2.9 Διαμερίσεις πινάκων

Θεωρούμε πίνακα $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{\mu \times \nu}$ και τους φυσικούς αριθμούς

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ έτσι, ώστε

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = \mu \quad \text{και} \quad \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s = \nu .$$

Στη συνέχεια με διακεκομμένες οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές αποκόβουμε τις μ_1 πρώτες γραμμές μετά τις μ_2 επόμενες γραμμές κ.ο.κ , τις ν_1 πρώτες στήλες κ.ο.κ. Έτσι από τον πίνακα Α σχηματίζουμε rs πίνακες, έστω $\mathrm{A}_{\kappa\lambda}, \kappa = 1,2,...,r,\ \lambda = 1,2,...,s,$ τύπου $\mu_\kappa \times \nu_\lambda$.

Οι πίνακες $\mathrm{A}_{\kappa\lambda}$ αποτελούν μία $r \times s$ **διαμέριση** του πίνακα Α που αντιστοιχεί στους αριθμούς ($\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$) και ($\nu_1, \nu_2, ..., \nu_s$). Συμβολικά γράφουμε $\mathrm{A} = \left(\mathrm{A}_{\kappa\lambda}\right)_{r\times s}$. Για παράδειγμα, ο 3×5 πίνακας

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

μπορεί να διαμεριστεί σε 6 υποπίνακες ως εξής

$$\mathrm{A} = \left(\mathrm{A}_{\lambda\mu}\right)_{2\times 3} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τον 5×4 πίνακα Β με μία 3×2 διαμέριση

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{2} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \\ \mathrm{B}_{31} & \mathrm{B}_{32} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Το γινόμενο των δύο πινάκων Α και Β είναι ο πίνακας

$$\mathrm{AB} = \left(\sum_{k=1}^{3} \mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}_{kj}\right)_{2\times 2} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 12 & 26 \\ 0 & 5 & -9 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right].$$

Σημειώνουμε ότι για να είναι γενικά δυνατός ο παραπάνω πολλαπλασιασμός διαμερισμένων πινάκων πρέπει και αρκεί να είναι δυνατός ο πολλαπλασιασμός όλων των αντίστοιχων υποπινάκων A_{ik} και B_{kj} .

Με κατάλληλη επιλογή των διαμερίσεων, συνήθως γίνεται ευκολότερα ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αντί να κάνουμε απ' ευθείας τον πολλαπλασιασμό των δύο πινάκων, πολλαπλασιάζουμε υποπίνακες που έχουν μικρότερο αριθμό γραμμών και στηλών. Αυτό είναι σημαντικό, κυρίως όταν οι δεδομένοι πίνακες έχουν μεγάλο αριθμό γραμμών και στηλών.

Μία ιδιαίτερη περίπτωση έχουμε, όταν ο πίνακας Α μπορεί να διαμεριστεί σε υποπίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_r$, πιθανώς διαφορετικών τάξεων, έτσι ώστε

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \vdots & O \\ O & A_2 & \vdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \vdots & A_r \end{bmatrix} = diag\left(A_1, A_2, \ldots, A_r\right).$$

Επιπλέον, αν

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix},\ \text{τότε } AB = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21},$$

όταν βέβαια ορίζονται οι πολλαπλασιασμοί και οι προσθέσεις υποπινάκων που εμφανίζονται, π. χ

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 2 & -3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 13 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & -12 \\ 0 & 10 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 21 & -6 \\ 2 & 5 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\text{και} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.10 Πίνακες με στοιχεία συναρτήσεις

Πολλές φορές θεωρούμε πίνακες με στοιχεία συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών, όπως οι πίνακες

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1\nu}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2\nu}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\mu 1}(t) & a_{\mu 2}(t) & \cdots & a_{\mu\nu}(t) \end{bmatrix},\ X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_\nu(t) \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 2. 10. 1 (i) *Ο πίνακας* $\mathrm{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$ *είναι συνεχής για* $t=t_0$, *αν κάθε συνάρτηση* $a_{ij}(t)$ *είναι συνεχής για* $t=t_0$. *Ο πίνακας* $\mathrm{A}(t)$ *είναι συνεχής στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$, *αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος* $[\alpha,\beta]$.

(ii) *Ο πίνακας* $\mathrm{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$ *είναι παραγωγίσιμος στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$, *αν κάθε μία από τις συναρτήσεις* $a_{ij}(t)$ *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *και η παράγωγός του είναι ο πίνακας*

$$\mathrm{A}'(t)\equiv\frac{d\mathrm{A}}{dt}:=\left(a_{ij}'(t)\right).$$

(iii) *Όμοια ορίζουμε το ολοκλήρωμα του πίνακα* $\mathrm{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{A}(t)dt:=\left(\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)dt\right).$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\mathrm{A}(t)=\begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\mathrm{A}'(t)=\begin{bmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \text{ και } \int_0^\pi \mathrm{A}(t)dt=\begin{bmatrix} e^\pi-1 & \dfrac{e^{2\pi}-1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της παραγώγισης πινάκων με στοιχεία συναρτήσεις παραθέτουμε παρακάτω, όπου $\mathrm{A}=\left(a_{ij}(t)\right)$, $\mathrm{B}=\left(b_{ij}(t)\right)$ και $\Gamma=\left(c_{ij}(t)\right)$ (σταθερός πίνακας) είναι πίνακες κατάλληλου τύπου, ώστε να ορίζονται οι εμφανιζόμενες πράξεις πινάκων :

1. $\dfrac{d}{dt}\left(\Gamma\mathrm{A}\right)=\Gamma\dfrac{d\mathrm{A}}{dt}$

2. $\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)=\dfrac{d\mathrm{A}}{dt}+\dfrac{d\mathrm{B}}{dt}$

3. $\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{AB}\right)=\dfrac{d\mathrm{A}}{dt}\mathrm{B}+\mathrm{A}\dfrac{d\mathrm{B}}{dt}$

4. $\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)=-\mathrm{A}^{-1}\dfrac{d\mathrm{A}}{dt}\mathrm{A}^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\nu}(\mathrm{K})$ είναι τέτοιος ώστε $\left(\mathrm{A}+2\mathrm{I}\right)^2 = \mathrm{O}$.

(α) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να εκφράσετε τον πίνακα A^{-1} ως πολυώνυμο του A.

(β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $\mathrm{A}+\mathrm{I}$ είναι αντιστρέψιμος.

2. Αν $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\nu}\left(\mathrm{K}\right)$, να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς, δικαιολογώντας την απάντησή σας με απόδειξη ή με κάποιο αντιπαράδειγμα :

(i) Αν $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{A}^2\mathrm{B}$ και A,B αντιστρέψιμοι, τότε $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

(ii) Αν A,B αντιστρέψιμοι, τότε και $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ αντιστρέψιμος.

(iii) Αν $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$ και $\mathrm{A} \neq \mathrm{O}$, τότε A,B μη αντιστρέψιμοι.

(iv) Αν $\mathrm{ABA}=\mathrm{O}$ και B μη αντιστρέψιμος, τότε $\mathrm{A}^2 = \mathrm{O}$.

3. Αν ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2\left(\mathbb{C}\right)$ είναι τέτοιος ώστε $\mathrm{A}^2 = \mathrm{O}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{C}$ έτσι, ώστε να ισχύει

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} xy & x^2 \\ -y^2 & -xy \end{bmatrix}.$$

Ισχύει το ίδιο, όταν $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$;

4. Οι πίνακες $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\nu}\left(\mathrm{K}\right)$ είναι τέτοιοι ώστε $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}, \mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$ και $\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)^2 = \mathrm{A}+\mathrm{B}$. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB} = -\mathrm{BA} = \mathrm{O}$.

5. Αν οι πίνακες A,B είναι συμμετρικοί, να αποδείξετε ότι:

(α) AB συμμετρικός $\Leftrightarrow$ $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$.

(β) Ο πίνακας $\mathrm{AB}-\mathrm{BA}$ είναι αντισυμμετρικός.

6. Αν $\mathrm{A}^k = \mathrm{O}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)^{-1} = \mathrm{I}+\mathrm{A}+\ldots+\mathrm{A}^{k-1}.$$

7. Ο $\nu \times \nu$ πίνακας J_{ν} έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Θεωρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \nu\beta \neq 0$.

(Α) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\mathrm{J}^2 = \nu\mathrm{J}$

(ii) ο πίνακας $\mathrm{X} = \alpha\mathrm{I}_{\nu} + \beta\mathrm{J}_{\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, αναζητώντας τον αντίστροφό του στη μορφή $\frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{I}_\nu+\gamma \mathrm{J}_\nu\right)$.

(B) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. (i) Αν οι $\nu\times\nu$ πίνακες A,B και P είναι τέτοιοι, ώστε $\mathrm{AP}=\mathrm{PB}$ και ο P είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$\mathrm{A}^n=\mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}.$$

(ii) Έστω $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathrm{P}\in\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PB}\Leftrightarrow \mathrm{P}=\begin{bmatrix} x & 2y \\ x & 3y \end{bmatrix}, x,y\in\mathbb{R}.$$

Θεωρώντας $x=y=1$, βρείτε τον πίνακα $\mathrm{A}^n, n\in\mathrm{N}^*$.

9. Οι πίνακες $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{M}_\nu(\mathrm{K})$ είναι τέτοιοι ώστε $(\mathrm{AB})^2=\mathrm{I}_\nu$.

Να αποδείξετε ότι οι πίνακες A,B είναι αντιστρέψιμοι και $(\mathrm{BA})^2=\mathrm{I}_\nu$

10. Αν $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{M}_\nu(\mathrm{K})$ με $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{AB}$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$.

11. Αν A είναι $\nu\times 1$ πίνακας τέτοιος, ώστε $\mathrm{A}^T\mathrm{A}=\mathrm{I}_1=[1]$, τότε ο πίνακας $\mathrm{H}=\mathrm{I}_\nu-2\mathrm{AA}^T$ είναι ο αντίστοιχος **πίνακας Householder**, που ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Αμερικανού μαθηματικού A. Householder.

(i) Αν $\mathrm{A}^T=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$, να επαληθεύσετε ότι $\mathrm{A}^T\mathrm{A}=\mathrm{I}_1=[1]$ και να υπολογίσετε τον αντίστοιχο πίνακα του Householder.

(ii) Αν H είναι πίνακας Householder , να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{H}=\mathrm{H}^T \text{ και } \mathrm{H}^T\mathrm{H}=\mathrm{I}_\nu.$$

12. Με την υπόθεση ότι όλοι οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται υπάρχουν, να αποδείξετε ότι:

(i) $\left(\mathrm{A}^{-1}+\mathrm{B}^{-1}\right)^{-1}=\mathrm{A}(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1}\mathrm{B}$ **(ii)** $(\mathrm{I}+\mathrm{AB})^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{BA})^{-1}$

(iii) $\left(\mathrm{A}+\mathrm{BB}^T\right)^{-1}\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\left(\mathrm{I}+\mathrm{B}^T\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)^{-1}$.

13. Να βρεθεί ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με καθένα από τους παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Να βρεθεί ο αντίστροφος, αν υπάρχει, των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

15. Ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}.$$

Να εξετάσετε για ποιες τιμές των παραμέτρων a, b το σύστημα:

(i) Έχει μοναδική λύση.
(ii) Έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων.
(iii) Έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων.
(iv) Δεν έχει λύση.

16. Να λύσετε τα γραμμικά συστήματα

(i) $\begin{Bmatrix} -x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{Bmatrix}$ **(ii)** $\begin{Bmatrix} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{Bmatrix}$.

(iii) $\begin{Bmatrix} 9x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 + 8x_4 = 0 \end{Bmatrix}$ **(iv)** $\begin{Bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 10x_1 - 10x_2 + 24x_3 = 0 \end{Bmatrix}$

17. Αν είναι $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R}), B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ και $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, να

προσδιορίσετε τον πίνακα BA.