ΣΕΙΡΕΣ FOURIER.

Η προσέγγιση συναρτήσεων μέσω πολυωνύμων, την οποία μελετήσαμε στην προηγούμενη Ενότητα, παρά την αποτελεσματικότητα και την, σχετική, απλότητά της, αποδεικνύεται ανεπαρκής για την περιγραφή/προσέγγιση περιοδικών συναρτήσεων. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την διαδικασία ανάπτυξης συναρτήσεων σε ***σειρές Fourier*** κατά την οποία οι υπό μελέτη συναρτήσεις προσεγγίζονται από απεικονίσεις της μορφής

$$\phi_k(x) = \sum_{n=0}^{k} (a_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)),$$

όπου οι συντελεστές a_n, β_n είναι πραγματικοί αριθμοί ενώ ο φυσικός k (***βαθμός*** της $\varphi_k(x)$) καθορίζει την περίοδο των προσεγγιστικών συναρτήσεων $\varphi_k(x)$. Οι τελευταίες ονομάζονται ***"τριγωνομετρικά πολυώνυμα"***. Στη συνέχεια δίνουμε μια συνοπτική περιγραφή της μεθόδου βάσει της οποίας γίνεται η προσέγγιση αυτή:

Αρχικά παρατηρούμε ότι μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού οποιαδήποτε συνάρτηση f(t) ορισμένη στο διάστημα [α,β] μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ως πεδίο ορισμού το [0,2π] (συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται από την σχέση $x = \dfrac{2\pi \cdot (t-a)}{\beta - \alpha}$). Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα περιορίσουμε την μελέτη μας σε συναρτήσεις που είναι ορισμένες στο διάστημα [0,2π].

Από την άλλη μεριά, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο προσέγγισης "ολικού" χαρακτήρα, ένα κριτήριο δηλαδή το οποίο θα λαμβάνει υπόψη του την συμπεριφορά της συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού της και όχι μόνο στην περιοχή ενός σημείου του, όπως συμβαίνει με το κριτήριο των παραγώγων στην προσέγγιση Taylor. Υιοθετήθηκε λοιπόν η χρήση των ορισμένων ολοκληρωμάτων σε όλο το πεδίο ορισμού [0,2π] των υπό μελέτη συναρτήσεων. Έτσι απαιτούμε:

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(x) \cdot \cos(kx)dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)dx,\ k = 1,2,...,n,$$

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(x) \cdot \sin(kx)dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)dx,\ k = 1,2,...,n.$$

Οι προηγούμενες σχέσεις, αν θεωρήσουμε ότι ο βαθμός n του προσεγγιστικού τριγωνομετρικού πολυωνύμου τείνει στο άπειρο, οδηγούν στο ***ανάπτυγμα Fourier*** της συνάρτησης f(x):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cdot\cos(nx)+\beta_n\cdot\sin(nx)),\ \text{όπου}\ \begin{aligned} a_0&=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)dx,\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx,\ n\in\mathbb{N},\\ \beta_n&=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin(nx)dx,\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Σημειώστε επίσης ότι, χρησιμοποιώντας ανάλογο μετασχηματισμό, μπορούμε να υποθέτουμε ότι η συνάρτηση που μελετάμε έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [-π,π]. Προκύπτουν τότε ακριβώς οι παραπάνω τύποι ***με όρια ολοκλήρωσης από –π έως π***.

Οι τύποι αυτοί απλοποιούνται σημαντικά στην περίπτωση άρτιων ή περιττών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα:

- *Αν η συνάρτηση f(x), $x\in[-\pi,\pi]$, είναι άρτια (ισχύει δηλαδή ότι f(-x)=f(x), για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$) τότε το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier διαμορφώνεται ως εξής:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot\cos(nx),\ \text{όπου}\ \alpha_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

- *Αν η συνάρτηση f(x), $x\in[-\pi,\pi]$, είναι περιττή (ισχύει δηλαδή ότι f(-x)=-f(x), για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$) τότε το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier γίνεται:*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n\cdot\sin(nx),\ \text{όπου}\ \beta_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(nx)dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

Παραδείγματα.

1. *Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση* $f(x)=x^2$, $0\le x<2\pi$.

Η ζητούμενη σειρά Fourier δίνεται από την παράσταση $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+\beta_n\sin(nx)\right)$ όπου οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin\left(nx\right)}{n} + \frac{2x\cos\left(nx\right)}{n^2} - \frac{2}{n^2}\frac{\sin\left(nx\right)}{n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$\frac{4\pi\ \sin\left(2\pi n\right)}{n} + \frac{4\cos\left(2\pi n\right)}{n^2} - \frac{2}{n^2}\frac{\sin\left(2\pi n\right)}{\pi n} = \frac{4}{n^2}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)dx = \left[\frac{-x^2\cos\left(nx\right)}{n} + \frac{2x\sin\left(nx\right)}{n^2} + \frac{2\cos\left(nx\right)}{n^3}\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{-(2\pi)^2\cos\left(2\pi n\right)}{n} + \frac{4\pi\sin\left(2\pi n\right)}{n^2} + \frac{2\cos\left(2\pi n\right)}{n^3} - \frac{2\cos\left(0\right)}{n^3} = \frac{-4\pi}{n}$$

Αρα, το ανάπτυγμα Fourier της $f(x)=x^2$ έχει ως εξής:

$$x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx)\right) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

Σημειώνουμε ότι η υπό μελέτη συνάρτηση $f(x)=x^2$ δεν είναι άρτια στο διάστημα [0,2π] γι αυτό και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχετικοί (απλούστεροι) τύποι. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να γίνει αν το πεδίο ορισμού της ήταν το [-π,π].

2. (α) *Να αναπτυχθεί η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

με f(0) = 0, σε σειρά Fourier στο διάστημα [-π , π] .

(β) *Να υπολογισθεί το άθροισμα* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. *Πόσους όρους πρέπει να κρατήσετε για να επιτύχετε ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων;*

(α) Η συνάρτηση είναι περιττή άρα θέλουμε μόνο τους συντελεστές β_n:

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^{n+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{(2k+1)\pi}, & \alpha\nu\ n = 2k \\ 0, & \alpha\nu\ n = 2k+1 \end{cases}$$

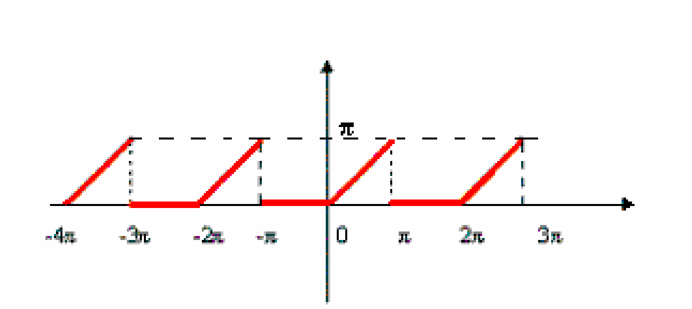
Άρα $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\cdot\sin[(2k+1)x]$.

(β) Για x=π/2 ισχύει ότι *f*(*x*)=1. Άρα:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}.\sin[\frac{(2k+1)\pi}{2}]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}.\sin[k\pi+\frac{\pi}{2}]=1\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Για να πετύχουμε ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει, σύμφωνα με τα όσα αναπτύχθηκαν και στην Παράγραφο 2.4 για τις εναλλάσσουσες σειρές και το σφάλμα προσέγγισής τους, να ισχύει ότι $a_{n+1}<10^{-2}$. Άρα $a_{n+1}=\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{100}\Rightarrow n\geq 49$ (όπου $a_n=\frac{1}{2n+1}$ η ακολουθία που "παράγει" την εναλλάσσουσα σειρά).

3. *Αναπτύξτε σε σειρά Fourier στο διάστημα [-π, π] την περιοδική συνάρτηση με γραφική παράσταση:*



και αποδείξτε ότι $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η υπό μελέτη συνάρτηση στο διάστημα [-π,0] είναι σταθερά ίση με **μηδέν**, ενώ στο [0,π] ο τύπος της είναι **f(x)=x**, ώστε η γραφική της παράσταση να είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο (0,0) και τέλος το (π,π). Άρα ο γενικός τύπος της θα είναι:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leq x<0\\ x, & 0\leq x<\pi\end{cases}$$

Επομένως, έχουμε το ανάπτυγμα Fourier της f(x) ως εξής:

$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+\beta_n\sin(nx))$, όπου:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}xdx)=\frac{1}{2\pi}(0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi})=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(nx)dx) = \frac{1}{\pi}(0+\int_{0}^{\pi} x\cdot(\frac{\sin(nx)}{n})'dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\left[x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} x'\cdot\frac{\sin(nx)}{n}dx) = \frac{1}{\pi}(\pi\cdot\frac{\sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi\cdot\frac{0}{n} - \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-\cos(0)) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω αν λάβουμε υπόψη μας ότι $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ n=2k \\ -1, & \alpha\nu\ n=2k+1 \end{cases}$, ως εξής: $a_n = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ n=2k \\ \dfrac{-2}{\pi(2k-1)^2}, & \alpha\nu\ n=2k\text{-}1 \end{cases}$, $k=1,2,3,\dots$

Ανάλογα υπολογίζουμε ότι:

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx) = \frac{1}{\pi}(0+\int_{0}^{\pi} x\cdot(\frac{-\cos(nx)}{n})'dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} x'\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}dx) = \frac{1}{\pi}(-\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}) = \frac{1}{\pi}(-\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\cdot 0) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ανάπτυγμα Fourier της f(x) είναι:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)).$$

Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο για **x=0** έχουμε:

$$f(0) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(0)) \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

<u>Ασκήσεις</u>

Αναπτύξτε σε σειρές Fourier τις επόμενες συναρτήσεις:

(i) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{-}\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ (Απάντηση: $f(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2\kappa+1)x)}{(2k+1)}$)

(ii) $f(x) = \frac{\pi - x}{2},\ x \in (0,2\pi)$ (Απάντηση: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$)